MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

60. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 24. MAI 1954)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1954

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

60. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Krull, W., Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. III 109
Jeger, M., Zur projektiven Differentialgeometrie der ebenen Kurven-3-Gewebe . . 112
Naumann, H., Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie 120
Rajagopal, C. T., A Generalization of Tauber's Theorem and some Tauberian Constants (II) 142
Herrmann, O., Eine metrische Charakterisierung eines Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppen 148
André, J., Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe . 156
Stallmann, F., Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. I 187
Rieger, G. J., Zu Linniks Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$ 213

KRULL, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 109—111 (1954)

Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. III*).

Von

WOLFGANG KRULL.

Herr M. KNESER ist unabhängig von mir zu ähnlichen Ergebnissen gekommen wie ich in der Note Pz. II. Insbesondere hat er dabei den folgenden Satz formuliert[1]): Die Behauptung: „die Körperfolge K_i besitzt die Eigenschaft (Z)" ist gleichwertig mit der folgenden Aussage: Es gibt für alle ganzen Zahlen $D \neq 0, 1$ eine berechenbare Schranke $\nu_0(D)$, derart, daß K_i für $i > \nu_0(D)$ keinen Unterkörper der Diskriminante D enthält. Der Beweis ergibt sich mühelos aus den folgenden, auch in Pz. II benutzten Tatsachen: a) Das über K_0 irreduzible Polynom $p(x) = x^n + r_1 x^{n-1} + \cdots + r_n$ wird höchstens dann über K_i reduzibel, wenn K_i einen Unterkörper enthält, dessen Diskriminante in der Diskriminante des durch $p(x)$ definierten Normalkörpers N aufgeht. b) Es gibt für jedes D nur endlich viele Körper der Diskriminante D.

Natürlich hat der Knesersche Satz, der kurz als *D-Kriterium* [Diskriminantenkriterium für die Eigenschaft (Z)] bezeichnet werden möge, in seiner allgemeinen Fassung im wesentlichen theoretische Bedeutung. Im folgenden soll eine andere Gedankenreihe entwickelt werden, die etwas überraschend wieder auf einen Zusammenhang mit der Diskriminante führt.

A-Kriterium [Kriterium des absoluten Betrages für (Z)]: *Die Körperfolge K_i besitzt dann und nur dann die Eigenschaft (Z), wenn man für jedes ganze positive $n > 1$ ein System von ganzzahligen Polynomen $\varphi_{in}(u)$ $(i = 1, \ldots, l(n))$ in n Unbestimmten $u_1, \ldots, u_n$ so bestimmen kann, daß die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes Paar (n, M) $(n, M = 2, 3, \ldots)$ läßt sich eine Schranke $\nu_0(n, M)$ berechnen, derart, daß für $\mu > \nu_0(n, M)$ ein ganzzahliges, über K_0 irreduzibles Polynom $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ höchstens dann über K_μ reduzibel wird, wenn $|\varphi_{in}(a_1, \ldots, a_n)| > M$ für mindestens ein i aus der Reihe $1, \ldots, l(n)$.*

Daß das A-Kriterium hinreicht, ist trivial. Um einzusehen, daß es auch notwendig ist, hat man nur zu beachten: Man setze $l(n) = n$, $\varphi_{in}(u) = u_i$. Dann genügt es zu zeigen: Hat die Folge K_i die Eigenschaft (Z), so gibt es ein $\nu_0(n, M)$ derart, daß für $\mu > \nu_0(n, M)$ das über K_0 irreduzible Polynom $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ auch über K_μ irreduzibel bleibt, falls $|a_i| \leq M$ $(i = 1, \ldots, n)$. Nun gibt es aber nur endlich viele ganzzahlige, über K_0 irreduzible, den Bedingungen $|a_i| \leq M$ $(i = 1, \ldots, n)$ genügende Polynome $p(x)$,

*) Vgl. die beiden gleichbetitelten Noten [diese Z. **59**, 57—60, 296—298 (1953)], die im folgenden mit Pz. I und Pz. II zitiert werden. Der Inhalt von Pz. II, insbesondere die Definition der Eigenschaft (Z) werden als bekannt vorausgesetzt.

[1]) Briefliche Mitteilung von Herrn M. KNESER.

etwa $p_1(x), \ldots, p_\omega(x)$, und es existiert wegen der Eigenschaft (Z) zu jedem $\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, \omega)$ ein $\nu_\varkappa$, derart, daß $p_\varkappa(x)$ irreduzibel über K_μ für $\mu > \nu_\varkappa$. Man kann also einfach $\nu_0(n, M) = \max(\nu_\varkappa)$ $(\varkappa = 1, \ldots, \omega)$ setzen.

Die praktische Brauchbarkeit des A-Kriteriums zeigt der Fall der Folge K_i^* der imaginär quadratischen Zahlkörper. Denn der elementare Beweis von Pz. I für die Tatsache, daß diese Folge die Eigenschaft (Z) besitzt, beruhte auf der Bemerkung, daß bei ihr im Sinne des A-Kriteriums einfach $l(n) = n$, $\varphi_{in}(u) = i^n + u_1 i^{n-1} + \cdots + u_n$, $\nu_0(n, M) = M$ gesetzt werden kann. Der enge Zusammenhang zwischen dem A-Kriterium und dem D-Kriterium ergibt sich aus dem folgenden

Satz. *Kennt man Schranken $\nu_0^*(M)$ $(M = 2, 3, \ldots)$, derart, daß für $i > \nu_0^*(M)$ jeder Unterkörper $K \neq K_0$ eines Körpers K_i der Folge $K_1, K_2, \ldots$ eine Diskriminante D mit $|D| > M$ besitzt, so kann man explizit ein Polynomsystem $\varphi_{in}^*(u)$ $(i = 1, \ldots, l^*(n);\ n = 2, 3, \ldots)$ angeben, derart, daß die Bedingung des A-Kriteriums für die Folge $K_1, K_2, \ldots$ mit $n(l) = n^*(l)$, $\varphi_{in}(u) = \varphi_{in}^*(u)$, $\nu_0(n, M) = \nu_0^*(M)$ erfüllt ist.*

Zur Konstruktion des Systems $\varphi_{in}^*(u)$ gehen wir aus von der Faktorzerlegung des „allgemeinen Polynoms" n-ten Grades $p(x; u) = x^n + u_1 x^{n-1} + \cdots + u_n = (x - \xi_1) \cdot \cdots \cdot (x - \xi_n)$ in dem zu $p(x; u)$ über $K_0(u)$ gehörigen Normalkörper $N_u = K_0(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Wir bilden mit weiteren Unbestimmten $v_1, \ldots, v_n$ das Polynom $P(x; u, v) = \prod [x - (\xi_{i_1} v_1 + \cdots + \xi_{i_n} v_n)]$, wobei die Produktbildung über alle Permutationen $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_n}$ der Reihe $\xi_1, \ldots, \xi_n$ zu erstrecken ist. Die Diskriminante $D(u, v)$ von $P(u, v)$ wird dann ein ganzzahliges Polynom in den u_i, v_k, und wir behaupten: *Das Koeffizientensystem $\varphi_{in}^*(u)$ des v-Polynoms $D(u, v)$ bildet ein Polynomsystem der gesuchten Art.* Zum Beweis hat man nur zu beachten: Spezialisiert man irgendwie die u_i so zu ganzen Zahlen a_i, daß $p(x) = p(x; a)$ über K_0 irreduzibel, so wird $P(x; a, v) = (x - \eta_1(v)) \cdot \cdots \cdot (x - \eta_n(v))$, und es ist jedes $\eta_k(v)$ primitives Element für den über $K_0(v)$ durch $p(x; a)$ definierten Normalkörper $N_{a,v}$. Dabei wird natürlich $N_{a,v} = N_a(v)$, falls N_a der zu $p(x; a)$ über K_0 gehörige Normalkörper ist. Ist ferner $R_{0,v}$ der Ring aller Polynomquotienten $\frac{a(v)}{b(v)}$ [$a(v)$ ganzzahlig, $b(v)$ ganzzahlig primitiv], $S_{a,v}$ der Ring aller von $R_{0,v}$ ganz abhängigen Elemente aus $N_{a,v}$ [2]), so gehören die $\eta_k(v)$ zu $S_{a,v}$, und daraus folgt, daß $D(a, v) = \prod_{i<k} (\eta_i(v) - \eta_k(v))^2$ in $R_{0,v}$ ein Vielfaches der Diskriminante von $S_{a,v}$ über $R_{0,v}$ ist, die ihrerseits, wie bekannt, mit der Diskriminante D von N_a über K_0 übereinstimmt. Das heißt aber: Es müssen alle Koeffizienten $\varphi_{in}^*(a)$ durch D teilbar sein. Aus dieser Tatsache folgt mühelos die Behauptung. [Man beachte insbesondere den schon für den Beweis des D-Kriteriums nötigen Satz a) weiter oben.]

---

[2]) $R_{0,v}$ bzw. $S_{a,v}$ sind die mit den Unbestimmten $v_1, \ldots, v_n$ gebildeten KRONECKERschen Funktionalringe, die zu dem Ring R_0 der ganzen Zahlen bzw. zu der Hauptordnung S_a aller algebraischen Zahlen aus N_a gehören. Aus dieser Tatsache folgt sofort die im Text benutzte Behauptung über die Diskriminante von $S_{a,v}$ über $R_{0,v}$.

Durch die Herstellung des Zusammenhanges zwischen D-Kriterium und A-Kriterium wird auch die Eigenart der (mindestens vorläufigen) Sonderstellung der Folge $K_1^*, K_2^*, \ldots$ der imaginär quadratischen Zahlkörper klarer herausgearbeitet. Die Sonderstellung der K_i^* beruht *nicht* darauf, daß man bei ihnen unmittelbar das A-Kriterium anwenden kann, bei dem nur vom absoluten Betrag und nicht von Teilbarkeitsbedingungen u. dgl. die Rede ist. Denn dieses Kriterium hat ja nicht nur an sich einen universellen Charakter, es ist auch wie wir sahen, mit dem „trivialen" Polynomsystem $\varphi_{in}^*(u)$ überall dort brauchbar, wo die Grundlagen für die Anwendung des D-Kriteriums vorhanden sind. Die Folge der K_i^* ist vielmehr dadurch ausgezeichnet, daß bei ihr neben dem trivialen System der $\varphi_{in}^*(u)$ ein nichttriviales, viel elementareres Polynomsystem $\varphi_{in}(u)$ im Sinne des A-Kriteriums bekannt ist. Will man sich also überhaupt über das D- und A-Kriterium hinaus mit den Körperfolgen, mit der Eigenschaft (Z) näher beschäftigen, so ist die nächstliegende Frage: *Gibt es außer den K_i^* weitere praktisch interessierende Körperfolgen K_i, bei denen einfach definierbare, nichttriviale Polynomsysteme $\varphi_{in}(u)$ im Sinne des A-Kriteriums existieren?* Dabei ist es natürlich — obwohl im A-Kriterium selbst nur vom absoluten Betrag die Rede ist — durchaus zulässig, daß bei der Aufstellung eines Polynomsystems Teilbarkeitsüberlegungen benutzt werden. Auf einer Teilbarkeitsbetrachtung beruhte ja auch der Beweis des Satzes über den Zusammenhang des D-Kriteriums mit dem A-Kriterium. Es dürfte daher auch unnötig sein, nach einer Verallgemeinerung des A-Kriteriums zu fragen, bei der außer von dem absoluten Betrag noch explizit von Kongruenzbedingungen Gebrauch gemacht wird.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 24. Oktober 1953.)

JEGER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 112—119 (1954)

Zur projektiven Differentialgeometrie der ebenen Kurven-3-Gewebe.

Von
M. JEGER.

Einleitung.

In der Ebene α sei ein differenzierbares Kurven-3-Gewebe[1]) durch die drei Nullrichtungen einer kubischen Differentialform gegeben[2]):

$$p_{ijk}\,dx^i\,dx^j\,dx^k = 0. \tag{1}$$

Den Tensor p_{ijk} setzen wir symmetrisch voraus; (1) lautet dann ausgeschrieben:

$$p_{111}(dx^1)^3 + 3p_{112}(dx^1)^2\,dx^2 + 3p_{122}\,dx^1(dx^2)^2 + p_{222}(dx^2)^3 = 0.$$

Die Gewebebedingungen erfordern, daß die drei Nullrichtungen in jedem Punkte eines Gebietes G reell und voneinander verschieden sind. Dies bedeutet, daß die Diskriminante der kubischen Differentialform (1) in allen Punkten von G positiv ist.

$$D \equiv 3p_{112}^2p_{122}^2 - 4p_{111}p_{122}^3 - 4p_{112}^3p_{222} - p_{111}^2p_{222}^2 + \\ + 6p_{111}p_{112}p_{122}p_{222} > 0\,^3).$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß $D \neq 0$ damit gleichbedeutend ist, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} p_{111} & 2p_{112} & p_{122} \\ p_{112} & 2p_{122} & p_{222} \end{pmatrix} \tag{2}$$

den Rang 2 hat. Falls also der Tensor p_{ijk} ein Gewebe aufspannt, so hat das homogene Gleichungssystem

$$p_{ijk}g^{jk} = 0; \qquad i = 1, 2 \tag{3}$$

in den symmetrischen Größen g^{jk} den Rang 2 und seine Lösung lautet bis auf einen Faktor

$$g^{11} = 2\begin{vmatrix} p_{112} & p_{122} \\ p_{122} & p_{222} \end{vmatrix}; \quad g^{12} = \begin{vmatrix} p_{122} & p_{111} \\ p_{222} & p_{112} \end{vmatrix}; \quad g^{22} = 2\begin{vmatrix} p_{111} & p_{112} \\ p_{112} & p_{122} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

[1]) Für die genaue Definition des Gewebes vgl. [1], [4] und [5]. Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schlusse.

[2]) Diese Darstellung eines 3-Gewebes durch eine kubische Differentialform geht auf J. HAANTJES zurück. Vgl. [2]; dort wird mit Hilfe des Tensors p_{ijk} die sog. Sechseckbedingung konstruiert.

[3]) Vgl. B. L. VAN DER WAERDEN: Moderne Algebra I, S. 172. Berlin 1930.

Durch eine einfache Rechnung findet man für die Determinante

$$g = \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{vmatrix} = D.$$

Aus $D \neq 0$ schließen wir daher die Existenz der inversen Größen g_{ik}, gegeben durch

$$g^{jk} g_{ik} = \delta^j_i. \tag{5}$$

Jedem Gewebe ist damit invariant eine konforme Metrik zugeordnet. Durch Abbildung der Ebene α auf eine Ebene $\bar{\alpha}$, derart, daß ein Netz aus dem Gewebe in das Koordinatennetz von $\bar{\alpha}$ übergeht[4]), läßt sich stets erreichen, daß

$$\bar{p}_{111} = \bar{p}_{222} = 0.$$

In $\bar{\alpha}$ ist dann

$$\bar{g}^{11} = 2\bar{p}^2_{122}; \quad \bar{g}^{12} = -\bar{p}_{122}\bar{p}_{112}; \quad \bar{g}^{22} = 2\bar{p}^2_{112}$$

und wir erhalten für den Winkel zwischen zwei Koordinatenlinien [gegeben durch die kovarianten Vektoren (1,0) und (0,1)]:

$$\cos\omega = \frac{\bar{g}^{ik}\bar{u}_i\bar{v}_k}{\sqrt{\bar{g}^{ik}\bar{u}_i\bar{u}_k \cdot \bar{g}^{jh}\bar{v}_j\bar{v}_h}} = -\frac{1}{2}.$$

Die Kurven des Koordinatennetzes in $\bar{\alpha}$ schneiden sich somit unter dem konstanten Winkel $\pi/3$. Da aber im Gewebe keine Kurvenschar irgendwie ausgezeichnet ist, ergibt sich sofort, daß zwei Kurven, welche verschiedenen Scharen angehören, sich unter dem Winkel $\pi/3$ schneiden[5]).

Wir denken nun für den Moment die Differentialform (1) in ihre drei reellen Linearfaktoren aufgespalten:

$$p_{ijk}\,dx^i\,dx^j\,dx^k = \prod_{\mu=1,2,3} u^{(\mu)}_i\,dx^i. \tag{6}$$

Dann ist

$$D = 24 \prod_{\mu \neq \nu} \{u^{(\mu)}_{[1} u^{(\nu)}_{2]}\}^2 \text{ [6])}.$$

Beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem (bzw. bei einer Abbildung von α auf $\bar{\alpha}$) durch

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2) \tag{7}$$

ist

$$\bar{u}^{(\mu)}_{[1}\bar{u}^{(\nu)}_{2]} = u^{(\mu)}_i u^{(\nu)}_k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{[1}} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{2]}} = 2u^{(\mu)}_{[1} u^{(\nu)}_{2]} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^{[1}} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^{2]}},$$

wobei

$$2\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^{[1}} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^{2]}} = \Delta = \frac{1}{\bar{\Delta}}$$

---

[4]) Infolge der Gewebebedingungen ist dies wenigstens im kleinen immer möglich.

[5]) Vgl. [1], § 17. Die hier eingeführte konforme Metrik stimmt mit der dort verwendeten überein.

[6]) Zur Vereinfachung der Schreibweise ist von der Bachschen Symbolik Gebrauch gemacht. Beispielsweise ist

$$R_{[ik]} = \tfrac{1}{2}\{R_{ik} - R_{ki}\} \quad \text{und} \quad R_{(ik)} = \tfrac{1}{2}\{R_{ik} + R_{ki}\}.$$

die Funktionaldeterminante der inversen Transformation zu (7) ist. Somit wird

$$\overline{D} = 24 \prod_{\mu \neq \nu} \{\bar{u}_{[1}^{(\mu)} \bar{u}_{2]}^{(\nu)}\}^2 = D \cdot \Delta^6. \tag{8}$$

Ferner ist

$$\bar{g} = g\,\overline{\Delta}^2. \tag{9}$$

g ist ein Pseudoskalar vom Gewicht -2, D ein Pseudoskalar vom Gewicht 6. Daraus ergibt sich aber, daß

$$g^3 D$$

ein Skalar ist.

Projektive Gewebeinvarianten.

Durch die in den unter Indizes symmetrischen Größen Γ_{jk}^i sei in der Ebene eine affine Übertragung erklärt. Verschiebt man ein Linienelement dx^i im Sinne dieser Übertragung stets in seiner eigenen Richtung, so heißt seine Bahn eine geodätische Linie der Übertragung. Aus dieser Definition leitet man leicht die Differentialgleichungen der geodätischen Linien ab:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = \alpha(t) \frac{dx^i}{dt}; \qquad i = 1, 2. \tag{10}$$

Durch die Lage der geodätischen Linien ist umgekehrt die affine Übertragung nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr gibt es eine ganze Klasse isogeodätischer affiner Übertragungen. Die Klasse, welcher unsere Übertragung Γ_{jk}^i angehört, wird aufgespannt durch eine allgemeine bahntreue Transformation

$$\Gamma^{*i}_{jk} = \Gamma_{jk}^i + \delta_j^i w_k + \delta_k^i w_j \quad [7] \tag{11}$$

mit dem willkürlichen Kovektorfeld w_k.

Das invariant mit einer Klasse isogeodätischer affiner Übertragungen verbundene System von Integralkurven der Gln. (10) wird auch als quasigeodätisches System bezeichnet. In einer solchen Klasse, welche etwa durch das zugehörige quasigeodätische System gegeben sein mag, ist nur die Verschiebung eines Linienelementes in seiner eigenen Richtung erklärt. Im Gegensatz zum affinen Zusammenhang, bei dem die Verschiebung eines Linienelementes längs beliebiger Wege erklärt ist, spricht man auch von einem projektiven Zusammenhang und wir wollen im folgenden affine Zusammenhänge oder Übertragungen, welche in derselben Klasse liegen, projektiv-äquivalent heißen.

In einer früheren Arbeit wurde gezeigt [8], daß die Kurven eines 3-Gewebes stets unendlich vielen quasigeodätischen Systemen angehören. Unter Zugrundelegung eines Koordinatensystems, in welchem

$$p_{111} = p_{222} = 0$$

[7] Vgl. SCHOUTEN: Der Ricci-Kalkül, S. 76. Berlin 1924.
[8] Vgl. [4], § 2 oder [5] Abschnitt II.

ist, ergibt sich bis auf bahntreue Transformationen für die CHRISTOFFELschen Symbole der allgemeinsten affinen Übertragung, in der die Gewebekurven geodätische Linien sind[9])

$$(12)\qquad \begin{cases} \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}\partial_2 \ln\left(\frac{p_{112}}{p_{122}}\right) + \lambda(x^1, x^2)\cdot p_{122} \\ \Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\partial_1 \ln\left(\frac{p_{122}}{p_{112}}\right) - \lambda(x^1, x^2)\cdot p_{112} \\ \Gamma^i_{jk} = 0, \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

wo $\lambda(x^1, x^2)$ eine willkürliche Funktion in den beiden Variabeln x^1 und x^2 ist. Daraus folgt, daß durch jede feste Wahl der Funktion λ in eindeutiger Weise eine Klasse isogeodätischer Übertragungen und damit ein quasigeodätisches System festgelegt ist.

Die Funktion λ bestimmt wohl zusammen mit einem 3-Gewebe ein quasigeodätisches System; sie ist aber keine Invariante dieser beiden Objekte. Letzteres entnimmt man ohne weiteres (12), denn diese Darstellung gilt ja nur in einem ganz speziellen Koordinatensystem und zudem ändert sich λ bereits bei einer Umnormierung des Tensors p_{ijk}

$$(13)\qquad \bar{p}_{ijk} = \sigma\, p_{ijk},$$

welche das Gewebe invariant läßt.

Mit einer affinen Übertragung ist ein koordinateninvarianter Differentiationsprozeß verbunden. Die kovariante Ableitung von p_{ijk} ist gegeben durch

$$(14)\qquad \nabla_h p_{ijk} = \partial_h p_{ijk} - \Gamma^l_{hi} p_{ljk} - \Gamma^l_{hj} p_{ilk} - \Gamma^l_{hk} p_{ijl}.$$

Diese Ableitung ist nicht projektiv-invariant; nach der bahntreuen Transformation (11) wird

$$(15)\qquad \nabla^*_h p_{ijk} = \nabla_h p_{ijk} - 3 w_h p_{ijk} - w_i p_{hjk} - w_j p_{ihk} - w_k p_{ijh}.$$

Unser Ziel besteht nun im Aufsuchen von Projektiv-Invarianten eines Gewebes bezogen auf die quasigeodätischen Systeme, denen seine Kurven angehören. Dies sind Größen, die nur vom Gewebe und einer bestimmten, das Gewebe geodätisch enthaltenden Klasse isogeodätischer affiner Übertragungen abhängen.

Zunächst bilden wir aus (15) durch Alternieren der Indizes i und h

$$(16)\qquad \nabla^*_{[h} p_{i]jk} = \nabla_{[h} p_{i]jk} - 2 w_{[h} p_{i]jk}.$$

Durch Überschieben mit g^{jk} ergibt sich infolge von (3)

$$(17)\qquad g^{jk} \nabla^*_{[h} p_{i]jk} = g^{jk} \nabla_{[h} p_{i]jk}.$$

(17) ist noch keine Invariante, denn sowohl p_{ijk} als auch g^{jk} sind nur je bis auf einen Faktor durch das Gewebe bestimmt. Hingegen kommt

$$(18)\qquad g^{jk} \nabla_{[h} p_{i]jk} = 0$$

[9]) Die Ableitung dieser Formeln ist in [4] und [5] durchgeführt.

Invariantencharakter zu, denn das Verschwinden der linken Seite ist invariant gegenüber Umnormierungen

$$\begin{cases} \bar{p}_{ijk} = \sigma \cdot p_{ijk} \\ \bar{g}^{jk} = \varrho \cdot g^{jk}. \end{cases} \tag{19}$$

Zur Diskussion von (18) verwenden wir nun wieder ein spezielles Koordinatensystem, in welchem $p_{111} = p_{222} = 0$. Aus $D \neq 0$ folgt dann

$$p_{112} \neq 0, \quad p_{122} \neq 0.$$

Die projektiven Zusammenhänge über dem Gewebe sind in diesem Falle durch (12) gegeben und man findet durch eine einfache Rechnung für die einzige wesentliche Komponente von (18):

$$g^{jk} \nabla_{[1} p_{2]jk} = -4\lambda (p_{112} p_{122})^2. \tag{20}$$

Das Verschwinden der linken Seite ist daher gleichbedeutend mit $\lambda = 0$. Das zugehörige quasigeodätische System ist aber das sog. Doppelverhältnissystem[10]; dieses besteht aus denjenigen Kurven der Ebene, deren Tangenten mit den Tangenten an das Gewebe ein festes Doppelverhältnis bilden.

Unter den projektiven Zusammenhängen über einem Gewebe ist das geometrisch ausgezeichnete D.V.-System durch die Beziehung (18) *gekennzeichnet.*

Wir haben damit in (18) eine koordinateninvariante Charakterisierung des D.V.-Systems gefunden.

Um zu einer invarianten Größe für die übrigen quasigeodätischen Systeme zu gelangen, müssen wir beachten, daß uns zur Elimination der Umnormierungsfaktoren σ und ϱ in (19) nur der koordinateninvariante Skalar $g^3 D$ zur Verfügung steht. Da

$$\bar{g} = \varrho^2 \cdot g \quad \text{und} \quad \bar{D} = \sigma^4 \cdot D$$

transformiert sich dieser bei einer Umnormierung wie

$$(\bar{g}^3 \bar{D}) = \varrho^6 \cdot \sigma^4 \cdot (g^3 D). \tag{21}$$

Es kommen als Gewebeinvarianten daher nur Größen in Frage, welche in g^{jk} vom Grad $3n$ und in p_{ijk} vom Grad $2n$ sind. Mit

$$p_k^{hl} = g^{ih} g^{jl} p_{ijk}$$

ist

$$p_k^{hl} g^{ij} \nabla_{[r} p_{s]ij}$$

eine solche Größe und es ist daher der Tensor

$$T_{krs}^{hl} = \frac{1}{\sqrt{D g^3}} \cdot p_k^{hl} g^{ij} \nabla_{[r} p_{s]ij} \tag{22}$$

[10] Diese Bezeichnungsweise stammt von THOMSEN; vgl. [2], sowie [4] und [5].

und damit auch die Verjüngung

$$T^h_{ks} = T^{hr}_{krs} \tag{23}$$

eine projektive Gewebeinvariante im geforderten Sinne[11]).

Der Tensor (22) ist symmetrisch in den Indizes h, l und schiefsymmetrisch in r, s. Weiter ist infolge von (3)

$$T^{hl}_{hrs} = 0.$$

Es verbleiben daher für T^{hl}_{krs} vier wesentliche Komponenten. Durch Abzählen stellt man leicht fest, daß auch die Verjüngung (23) vier wesentliche Komponenten umfaßt.

In unserem speziellen Koordinatensystem findet man unter Berücksichtigung von (20) für die vier wesentlichen Komponenten von (23):

$$\begin{cases} T^1_{11} = -T^2_{12} = -T^2_{21} = \frac{4}{3}\lambda \cdot p_{112} \\ T^2_{22} = -T^1_{12} = -T^1_{21} = -\frac{4}{3}\lambda \cdot p_{122} \\ T^1_{22} = 0 \\ T^2_{11} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Wir bezeichnen den Tensor T^i_{ks} als Einbettungstensor des Gewebes. Aus (12) und (24) entnehmen wir:

Zu verschiedenen quasigeodätischen Systemen gehören verschiedene Einbettungstensoren.

Das Verschwinden des Einbettungstensors kennzeichnet das Doppelverhältnissystem.

Geodätische Einbettung von Geweben.

Die Einbettung eines 3-Gewebes in quasigeodätische Systeme wurde bis jetzt nur in einem speziellen Koordinatensystem explizit angegeben[12]). Zum Schluß sei diese Konstruktion auch noch in einem beliebigen Koordinatensystem durchgeführt.

Das Gewebe sei gegeben durch (1). Wir betrachten nun eine beliebige Gewebekurve $x^i(t)$ [13]); sie ist Integralkurve eines Nullrichtungsfeldes von (1) und es ist daher:

$$\frac{d}{dt}\left(p_{ijk}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right) = 0. \tag{25}$$

Führt man den Differentiationsprozeß aus, so ergibt sich

$$\left\{\partial_h p_{ijk}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt} + 3p_{ijk}\frac{d^2x^k}{dt}\right\}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0.$$

---

[11]) Es handelt sich genauer um eine Relativ-Invariante des Gewebes, bezogen auf ein bestimmtes quasigeodätisches System, dem das Gewebe angehört.

[12]) Vgl. Formeln (12). Dort sind die Einbettungsbeziehungen aufgelöst nach den Übertragungsparametern Γ^i_{jk}.

[13]) t ist Kurvenparameter.

Die Kurve $x^i(t)$ ist eine geodätische Linie in der affinen Übertragung Γ^i_{jk}, wenn

$$\frac{d^2x^l}{dt^2} + \Gamma^l_{hk}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha(t)\frac{dx^l}{dt}. \tag{26}$$

Nach Elimination der zweiten Ableitungen in (25) mit Hilfe von (26) erhalten wir

$$\{\partial_h p_{ijk} - 3\Gamma^l_{hi} p_{ljk}\}\frac{dx^h}{dt}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Durch Aufspaltung des zweiten Gliedes in der Klammer und nachfolgende geeignete Wahl der Summationsindizes läßt sich dieser Ausdruck zurückführen auf

$$\nabla_h p_{ijk}\frac{dx^h}{dt}\cdot\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt}\cdot\frac{dx^k}{dt} = 0. \tag{27}$$

Im Hinblick auf den Vergleich von Nullrichtungen müssen wir den erzeugenden Tensor der Differentialform auf der linken Seite von (27) symmetrisieren[14]). Mit

$$\nabla_{(h} p_{ijk)} = p_{hijk}$$

ergibt sich für (27) ähnlich wie im Falle der kubischen Differentialform (1) die symmetrische Schreibweise

$$p_{hijk}\,dx^h\,dx^i\,dx^j\,dx^k = 0.$$

Soll das Gewebe geodätisch sein, so müssen sämtliche drei Nullrichtungen von p_{ijk} zugleich auch Nullrichtungen von p_{hijk} sein. Die vierte Nullrichtung von p_{hijk} ist willkürlich; wir legen sie fest durch ein Kovektorfeld u_i. Da die Koeffizienten einer symmetrischen Differentialform durch die Nullrichtungen bis auf einen Faktor bestimmt sind, ergibt sich als Einbettungsbedingung:

$$p_{hijk} = u_{(h} p_{ijk)}. \tag{28}$$

Ausgeschrieben lautet (28)

$$\begin{cases} \nabla_1 p_{111} = u_1 p_{111} \\ 3\nabla_1 p_{112} + \nabla_2 p_{111} = 3u_1 p_{112} + u_2 p_{111} \\ 2\nabla_1 p_{122} + 2\nabla_2 p_{112} = 2u_1 p_{122} + 2u_2 p_{112} \\ \nabla_1 p_{222} + 3\nabla_2 p_{122} = u_1 p_{222} + 3u_2 p_{122} \\ \nabla_2 p_{222} = u_2 p_{222}. \end{cases} \tag{29}$$

Der willkürliche Kovektor u_i läßt sich noch eliminieren; (29) ist damit äquivalent, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} \nabla_1 p_{111} & 3\nabla_1 p_{112} + \nabla_2 p_{111} & 2\nabla_1 p_{122} + 2\nabla_2 p_{112} & \nabla_1 p_{222} + 3\nabla_2 p_{122} & \nabla_2 p_{222} \\ p_{111} & 3p_{112} & 2p_{122} & p_{222} & 0 \\ 0 & p_{111} & 2p_{112} & 3p_{122} & p_{222} \end{pmatrix}$$

[14]) Der symmetrische Teil des erzeugenden Tensors einer Differentialform n-ter Ordnung ist durch die n Nullrichtungen bis auf einen Faktor eindeutig bestimmt.

den Rang 2 hat. Dies entspricht einem linearen Gleichungssystem in den Γ^i_{jk}; die Lösung führt auf die den Formeln (12) analogen Ausdrücke für die Γ^i_{jk} in einem allgemeinen Koordinatensystem.

Bemerkenswert ist die aus dieser Beziehung folgende Bedingung für ein Geradengewebe. Das zum Tensor p_{ijk} gehörende 3-Gewebe ist gerade, wenn es geodätisch in der Übertragung $\Gamma^i_{jk}=0$ enthalten ist, d.h. wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial_1 p_{111} & 3\partial_1 p_{112}+\partial_2 p_{111} & 2\partial_1 p_{122}+2\partial_2 p_{112} & \partial_1 p_{222}+3\partial_2 p_{122} & \partial_2 p_{222} \\ p_{111} & 3p_{112} & 2p_{122} & p_{222} & 0 \\ 0 & p_{111} & 2p_{112} & 3p_{122} & p_{222} \end{pmatrix}$$

den Rang 2 hat.

Literatur.

[1] Blaschke-Bol: Geometrie der Gewebe. Berlin 1938. — [2] Haantjes, J.: Hexagonal tree-webs. Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam **49**, No. 1 (1946). — [3] Thomsen, G.: Doppelverhältnis-Systeme. Abh. Hamburg **8**, 115—122 (1930). — [4] Jeger, M.: Projektive Zusammenhänge und Gewebe. Diss. E. T. H. Zürich 1949. — [5] Jeger, M.: Projektive Methoden in der Gewebegeometrie. Comm. Math. Helv. **24**, 260—290 (1950).

Zürich (Schweiz), Technische Hochschule.

(Eingegangen am 16. Januar 1954.)

Naumann, H.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 120—141 (1954)

Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie.

Von
Herbert Naumann.

Einleitung.

Nach M. Hall [*10*][1]) reicht zur Begründung einer analytischen ebenen Geometrie, in der die Geraden durch lineare Gleichungen ausgedrückt werden, außer den trivialen affinen Inzidenzaxiomen ein eng an das Koordinatensystem gebundener Spezialfall des kleinen Desarguesschen Satzes aus. Algebraisch werden auf dieser Stufe außer den Loopeigenschaften der Addition und Multiplikation[2]) nur gewisse, Addition und Multiplikation miteinander verbindende Auflösbarkeitsaxiome gefordert, aber keines der assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze. Bei Hinzunahme einzelner dieser Rechengesetze ergeben sich weitere Stufen, die geometrisch durch stärkere Schnittpunktsätze gekennzeichnet sind. In der vorliegenden Arbeit wird eine derartige Stufensystematik gegeben und die Frage nach der Unabhängigkeit der einzelnen Stufen mittels entsprechender Modelle behandelt.

Die vorliegende Arbeit entstand im Anschluß an Seminare über Grundlagen der Geometrie auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Arnold Schmidt.

§ 1. Axiomatische Grundlage.

Dieser Arbeit liegen die Axiome und Punktrechnungsdefinitionen Hilberts[3]) zugrunde. Von den geometrischen Axiomen Hilberts benötigen wir die ebenen Verknüpfungsaxiome I 1—3 und das verschärfte Parallelenaxiom IV*. Wir bezeichnen dieses Aggregat von Axiomen im folgenden kurz als die (trivialen) ebenen affinen Axiome und eine Geometrie, die diesen Axiomen genügt, als „affine Ebene".

Von dem Hilbertschen Axiomensystem der reellen Zahlen[4]) benötigen wir die Verknüpfungs- und die Rechenaxiome[5]):

[1]) Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Arbeit.

[2]) Letztere unter Ausschluß des additiv neutralen Elements 0, für dessen Multiplikation $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ gilt.

[3]) D. Hilbert [*11*].

[4]) D. Hilbert [*11*], Anhang VI [„Über den Zahlbegriff", abgedruckt aus Jber. dtsch. Math. Ver. 8 (1900)]. — Die Numerierung der Axiome ist hier eine andere als bei Hilbert.

[5]) In der Algebra ist diese Aufteilung der Körperaxiome in Axiome der Verknüpfung und Axiome der Rechnung nicht üblich geworden; im folgenden wird sie sich jedoch als zweckmäßig und der Behandlung unseres Stoffes als durchaus angemessen erweisen.

I. Axiome der Verknüpfung.

I 1. Eindeutige Existenz einer Summe und eines Produkts.

I 2. Eindeutige Existenz einer Zahl Null und einer davon verschiedenen Zahl Eins mit

$$a + 0 = 0 + a = a, \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \qquad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.$$

I 3. Eindeutige Lösbarkeit der Gleichungen $a + x = b$ und $y + a = b$ bei beliebig gegebenem a, b und der Gleichungen $a\,x = b$ und $y\,a = b$ bei $a \neq 0$.

II. Axiome der Rechnung.

Wenn a, b, c beliebige Zahlen sind, so gelten stets folgende Formeln:

II 1. $a + (b + c) = (a + b) + c$

II 2. $a(b + c) = a\,b + a\,c$ (1. distributives Axiom)

II 3. $a + b = b + a$

II 4. $(a + b)\,c = a\,c + b\,c$ (2. distributives Axiom)

II 5. $a(b\,c) = (a\,b)\,c$

II 6. $a\,b = b\,a$.

Zur Definition eines Alternativkörpers (vgl. § 4) fügen wir den Axiomen I 1—3, II 1—4 das folgende abgeschwächte assoziative Gesetz der Multiplikation an:

II 5*: Wenn a und b beliebige Zahlen sind, so gelten stets die Formeln

$$a(a\,b) = (a\,a)\,b \quad \text{und} \quad (a\,b)\,b = a(b\,b).$$

Die allgemeinsten Systeme doppelter Komposition, von denen hier die Rede sein wird, erfüllen die Axiome I 1—3; wir nennen sie kurz *„Zahlensysteme"* und ihre Elemente einfach *„Zahlen"*.

Zur Definition einer affinen analytischen Geometrie mittels eines Zahlensystems reichen die Axiome I 1—3 nicht aus, wie folgendes Beispiel zeigt.

Wir betrachten das Zahlensystem mit der Additions- und Multiplikationsvorschrift

$+$	0	1	a	a^2	a^3	a^4
0	0	1	a	a^2	a^3	a^4
1	1	0	a^4	a^3	a^2	a
a	a	a^2	0	1	a^4	a^3
a^2	a^2	a^4	a^3	0	a	1
a^3	a^3	a	1	a^4	0	a^2
a^4	a^4	a^3	a^2	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	a^2	a^3	a^4
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	a^2	a^3	a^4
a	0	a	a^2	a^3	a^4	1
a^2	0	a^2	a^3	a^4	1	a
a^3	0	a^3	a^4	1	a	a^2
a^4	0	a^4	1	a	a^2	a^3.

In diesem System gelten die algebraischen Verknüpfungsaxiome I 1—3 (und außerdem die Axiome der Rechnung II 2, 4—6, aber nicht II 1 und II 3).

Durch Zahlenpaare dieses Zahlensystems kann keine affine Geometrie gegeben werden, denn es lassen sich $6^2 = 36$ Zahlenpaare bilden, und diesen 36 Zahlenpaaren müßte eine affine Geometrie mit 6 Punkten auf der Geraden entsprechen, was nach einem kombinatorischen Resultat von G. TARRY [25][6] nicht möglich ist.

Wenn jedoch gewisse lineare Auflösbarkeitsaxiome zu den Axiomen I 1—3 hinzutreten, dann ist die Möglichkeit, eine affine Geometrie zu konstruieren, immer gegeben, wie sich zeigen wird.

Unter Voraussetzung des assoziativen Gesetzes der Addition II 1 reichen die Axiome Iα und Iβ aus:

Iα. $-a\,x + b\,x = c$ eindeutig lösbar für $a \neq b$

Iβ. $y\,a - y\,b = c$ eindeutig lösbar für $a \neq b$.

Hierbei ist $-a\,x$ die bei gegebenem x nach I 3 eindeutig existierende Zahl, für die $a\,x + (-a\,x) = 0$ und, nach I 1—3, II 1, auch $-a\,x + a\,x = 0$ ist; $y\,a - y\,b$ ist lediglich als abkürzende Schreibweise für $y\,a + (-y\,b)$ zu verstehen.

Ist die Assoziativität der Addition nicht vorausgesetzt, so treten an die Stelle von Iα und Iβ die Axiome Iα* und Iβ*:

Iα*. Das Gleichungssystem

$$y + a\,x = b$$
$$y + c\,x = d$$

ist für $a \neq c$ eindeutig nach x, y auflösbar.

Iβ*. Die Gleichung

$$a + u\,b = c + u\,d$$

ist für $b \neq d$ eindeutig nach u auflösbar.

Diese Auflösbarkeitsaxiome wird man sinngemäß zur Gruppe I zählen.

§ 2. Einführung einer Punktrechnung. Koordinaten. Vergleich der Definitionen HILBERTs mit denen HALLs.

In einer beliebigen affinen Ebene zeichnen wir drei verschiedene Scharen paralleler Geraden aus und nennen die zugehörigen Geraden $\mathfrak{X}$-, $\mathfrak{Y}$- und $\mathfrak{E}$-Geraden. Einen Punkt der Ebene wählen wir als Koordinatenursprung und nennen die $\mathfrak{X}$-Gerade durch O die x-Achse und die $\mathfrak{Y}$-Gerade durch O die y-Achse. Nach HILBERT definiert man nun für die Punkte der x-Achse eine Addition und eine Multiplikation und stellt die Punkte der Ebene durch Koordinatenpaare solcher Punkte dar; bei HALL geschehen entsprechend

[6]) Siehe auch R. H. BRUCK u. H. J. RYSER [7].

Definitionen für die Punkte der $\mathfrak{E}$-Geraden durch O. Die Definitionen HILBERTs und HALLs geben wir andeutungsweise durch Fig. 1 zusammenfassend wieder.

Für beide Punktrechnungen gelten ersichtlich die algebraischen Axiome I 1—3. Jedem beliebigen Punkt A der x-Achse ordnen wir den Schnittpunkt A' der $\mathfrak{E}$-Geraden durch O mit der $\mathfrak{Y}$-Geraden durch A zu und umgekehrt. Um die Multiplikation in der HALLschen Punktrechnung mit der

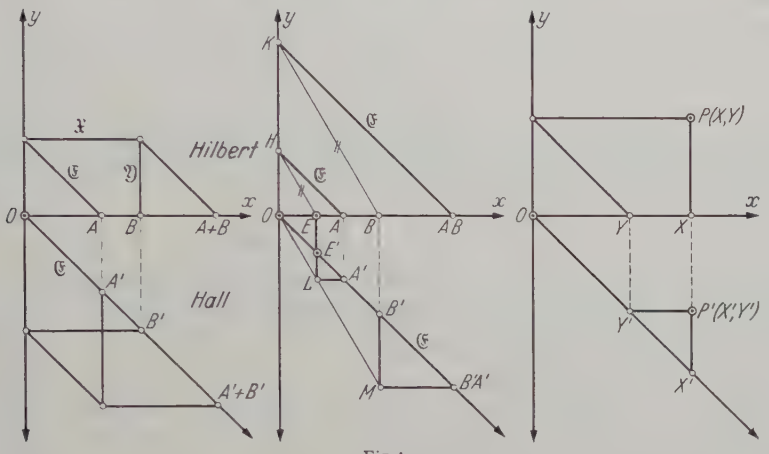

Fig. 1.

in der HILBERTschen vergleichen zu können, setzen wir zunächst voraus, daß die willkürlich, aber fest zu wählenden Punkte E und E', die die Rolle der Eins in den Punktrechnungen spielen, einander zugeordnete Punkte sind. Ferner fordern wir die Gültigkeit des affinen kleinen Desarguesschen Satzes für den Fall, daß zwei entsprechende Dreiecks-Ecken auf der y-Achse liegen und die zugehörigen Gegenseiten $\mathfrak{X}$-Geraden sind (Fig. 2). Dieser Schnittpunktsatz wird im folgenden mit $\delta_y^{\mathfrak{X}}$ bezeichnet werden. Durch Anwendung dieses Satzes (bzw. einer seiner mit ihm äquivalenten Umkehrungen) erst auf die Dreiecke E, A, H; L, A', O, dann auf die Dreiecke B, AB, K; $M, B'A', O$ folgt sodann, daß HILBERTsche und HALLsche Punktrechnungsmultiplikationen invers-isomorph zueinander sind, d.h. $a\, b_{\text{Hilbert}} = b\, a_{\text{Hall}}$, wo a und b die den Punkten A, A' und B, B' zugeordneten Zahlen sind.

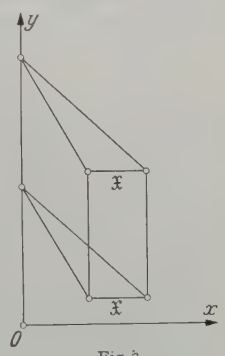

Fig. 2.

Satz 1. *Seien in einer affinen Geometrie die Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$, ferner die Punkte O, E und E' fest gewählt (OE $\mathfrak{X}$-Gerade, EE' $\mathfrak{Y}$-Gerade, OE' $\mathfrak{E}$-Gerade); ferner seien mit ${}_l a$ und ${}_r a$ die zu a links- bzw. rechtsnegativen Zahlen bezeichnet* (${}_l a + a = a\ {}_r a = 0$). *Dann ist unter Voraussetzung des Schnittpunktsatzes $\delta_y^{\mathfrak{X}}$ der Zusammenhang zwischen der* HILBERTschen *und der* HALLschen *Darstellung durch folgende Beziehungen gegeben:*

	HILBERT		HALL
(1)	$a+b=c$	$\leftrightarrow$	$b \mathbin{\overset{\tau}{-}} c = \mathbin{\overset{\tau}{-}} a$
(1′)	$\mathbin{\overset{\iota}{-}} c + a = \mathbin{\overset{\iota}{-}} b$	$\leftrightarrow$	$a+b=c$
(2)	$a\,b$	$\leftrightarrow$	$b\,a$
(3)	$P(a,b)$	$\leftrightarrow$	$P(a, \mathbin{\overset{\tau}{-}} b)$
(3′)	$P'(a, \mathbin{\overset{\iota}{-}} b)$	$\leftrightarrow$	$P'(a,b)$
(4)	$x=c$	$\leftrightarrow$	$x=c$
(5)	$y+a\,x=b$	$\leftrightarrow$	$y=x\,a \mathbin{\overset{\tau}{-}} b$
(5′)	$y+a\,x=\mathbin{\overset{\iota}{-}} b$	$\leftrightarrow$	$y=x\,a+b$.

Beweis. Die Beziehungen zwischen beiden Additionen folgen unmittelbar aus ihren Definitionen. Auf Grund der Koordinatendefinitionen ist in beiden Additionen für einen beliebigen Punkt

$$x_{\text{Hilbert}} = x_{\text{Hall}}, \qquad y_{\text{Hilbert}} + y_{\text{Hall}} = 0,$$

was mit (3), (3′), (4) äquivalent ist. Ist bei HALL eine Gerade durch $y = x\,a + b$ dargestellt, so ist bei HILBERTscher Addition und Multiplikation nach (1′), (2) $\mathbin{\overset{\iota}{-}} y_{\text{Hall}} + a\,x_{\text{Hall}} = \mathbin{\overset{\iota}{-}} b$, folglich $y_{\text{Hilbert}} + a\,x_{\text{Hilbert}} = \mathbin{\overset{\iota}{-}} b$, womit (5′) bewiesen ist. (5) ist mit (5′) äquivalent.

Die durch (1), (1′) gegebene Beziehung zwischen der HILBERTschen und der HALLschen Punktrechnungsaddition vermittelt dann und nur dann eine Isomorphie, wenn in einer der beiden Additionen (und folglich in beiden) aus $a+(b+c)=0$ stets $(a+b)+c=0$ folgt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn das assoziative Gesetz der Addition gilt, und folgt auch schon aus den schwächeren Gesetzen

$$\left.\begin{aligned} -a+a=a-a=0, \\ (a+b)-b=a=-b+(b+a). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

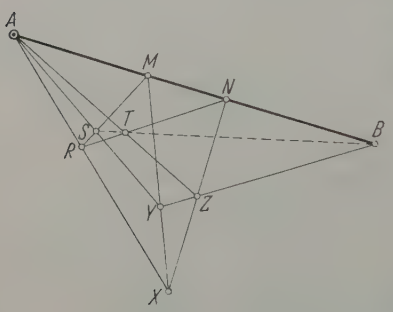

Fig. 3.

§ 3. Stufen der Begründung.

Wir stellen nun sieben Stufen der affinen Geometrie zusammen, die durch verschiedene geometrische und algebraische Voraussetzungen gekennzeichnet sind.

Zur Abkürzung bezeichnen wir die benötigten Schnittpunktsätze durch Buchstaben. Den affinen PAPPUS-PASCALschen Satz und den affinen DESARGUESschen Satz nennen wir Π und Δ. Mit $\boldsymbol{d}$ bezeichnen wir den sog. „kleinen Desarguesschen Satz", von M. HALL als „Theorem L" bezeichnet (Fig. 3; Benennungen der Punkte wie bei HALL); es können bei diesem Satz Punkte oder auch eine Gerade uneigentlich sein. Die übrigen der benötigten Schnittpunktsätze sind sämtlich Spezialfälle des kleinen Desarguesschen Satzes. Wird die Gerade $AMNB$ als uneigentlich vorausgesetzt, so entsteht der „affine kleine Desarguessche Satz" δ. Weiter ist $\boldsymbol{d}^{\mathfrak{B}}$ der Spezialfall mit ARX

als uneigentlicher Gerade und A als uneigentlichem Schnittpunkt Y_∞ aller $\mathfrak{Y}$-Geraden, $\delta_\mathfrak{Y}$ der Spezialfall mit $AMNB$ als uneigentlicher Gerade und A als Y_∞, analog $\delta_\mathfrak{X}$ mit $AMNB$ als uneigentlicher Gerade und A als X_∞, und schließlich $\delta_y^\mathfrak{X}$ mit $AMNB$ als uneigentlicher Gerade, ARX als y-Achse und B als X_∞ (vgl. Fig. 2).

Eine affine Geometrie und ein Zahlensystem nennen wir gekoppelt, wenn (1) das gegebene Zahlensystem isomorph dem Zahlensystem ist, das durch die gegebene Geometrie nach Vorgabe eines Koordinatensystems vermittels der HILBERTschen Punktrechnung definiert ist, und ferner (2) die gegebene Geometrie isomorph der Geometrie ist, die über dem gegebenen Zahlensystem bei Erklärung von Punkten als geordneten Zahlenpaaren und Geraden als Gleichungen $y+a\,x=b$ und $x=c$ definiert ist.

Ein geometrisches und ein algebraisches Axiomensystem nennen wir gekoppelt, wenn jedes Modell des einen mit einem Modell des anderen gekoppelt ist.

Satz 2. *Es bestehen folgende Koppelungen*:

	Geometrische Axiome I 1–3, IV* sowie	Algebraische Axiome I 1–3 sowie		Geometrische Axiome I 1–3, IV* sowie	Algebraische Axiome I 1–3 sowie
1. Stufe	Π	II 1–6	5. Stufe	$\delta_\mathfrak{X}$, $\delta_\mathfrak{Y}$	I α, II 1,2
2. Stufe	Δ	II 1–5		$(\rightarrow\delta)$	$(\rightarrow$ II 3)
3. Stufe	$\boldsymbol{d}$	II 1–4,5*	6. Stufe	$\delta_\mathfrak{Y}$	I α, β, II 1
4. Stufe	δ, $\boldsymbol{d}^\mathfrak{Y}$	II 1–4	7. Stufe	$\delta_y^\mathfrak{X}$	I α*, β*

Die meisten dieser Koppelungen sind aus der Abhandlung [*10*] von M. HALL mittels der Übersetzungsvorschrift von § 2 und einfacher geometrischer Überlegungen herzuleiten[7]). Wegen des Beweises von δ aus $\delta_\mathfrak{X}$ und $\delta_\mathfrak{Y}$ und des Beweises der Kommutativität der Addition II 3 aus den Axiomen I 1–3, α, II 1, 2 siehe § 6.1 und § 6.2.

§ 4. Modelle zu den Stufen eins bis vier.

Wir behandeln nun die Frage nach der logischen Unabhängigkeit der einzelnen Stufen. Zu den Unabhängigkeitsbeweisen werden — zumeist algebraische — Modelle herangezogen. Unter einem Modell (einer Geometrie, eines Zahlensystems) der ersten, zweiten, ..., siebenten Stufe wollen wir ein System von Dingen verstehen, welches die (geometrischen oder algebraischen) Axiome der betreffenden Stufe befriedigt, nicht aber die der nächst-„stärkeren" Stufe. Bei der Angabe solcher Modelle werden wir bei der stärksten (ersten) Stufe beginnen und schrittweise bis zur schwächsten (siebenten) Stufe vorgehen.

Die algebraischen Modelle der *ersten Stufe* sind die Körper, und als algebraische Modelle der *zweiten Stufe* kommen genau die echten Schiefkörper in Betracht.

[7]) Es sei hier daran erinnert, daß die beiden ersten Stufen zuerst von D. HILBERT [*11*] und die dritte von R. MOUFANG [*15*], [*16*] näher untersucht wurden; betreffs weiterer vorliegender Arbeiten zu den in Satz 2 angegebenen Koppelungen sei auf später folgende Zitate verwiesen.

Die algebraischen Modelle der *dritten Stufe* sind die echten Alternativkörper und als solche CAYLEY-DICKSON-Algebren über ihren Zentren[8]). Die einfachste unter ihnen ist die CAYLEYsche Algebra über dem Körper der rationalen oder der reellen Zahlen, deren Basisgrößen $1, e_1, e_2, \ldots, e_7$ sich nach passender Numerierung folgendermaßen multiplizieren:

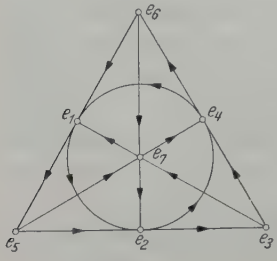

Fig. 4.

$$e_i\, e_{i+k} = \begin{cases} e_{i+3k} \\ -1 \\ -e_{i-2k} \end{cases} \quad \text{für} \quad k^3 \equiv \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases} \pmod 7,$$

wobei die Indizes mod 7 aus dem Restsystem 1, 2, ..., 7 zu nehmen sind. Diese Multiplikationsvorschrift läßt sich leicht in Gestalt einer (symbolischen) Konfiguration 7_3 merken, deren Seiten mit einem zyklischen Durchlaufungssinn versehen sind (Fig. 4):

Es ist $e_\alpha^2 = -1$ und, wenn $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ ein „kollineares" Tripel von Basisgrößen ist, $e_\alpha\, e_\beta = -e_\beta\, e_\alpha = \pm e_\gamma$ mit dem oberen bzw. unteren Vorzeichen bei positiver bzw. negativer Orientierung des Tripels. — In Analogie zu den Quaternionen könnte man diese Algebra die „CAYLEYschen Oktonionen" nennen[9]).

Als algebraische Modelle der *vierten Stufe* kommen alle diejenigen nichtassoziativen, beiderseits distributiven Divisionsalgebren in Frage, in denen II 5* nicht gilt. Beispiele hierzu gab L. E. DICKSON[10]).

§ 5. Modelle zur fünften Stufe.

Die algebraischen Modelle zur fünften Stufe sind die nur linksseitig distributiven Zahlensysteme mit assoziativer Addition, sofern in ihnen die Gleichung $-a\,x + b\,x = c$ für $a \neq b$ eine eindeutige Lösung besitzt. Zu diesen Modellen gehören alle *endlichen* nur linksseitig distributiven Divisionsalgebren, da im Falle der Endlichkeit das angeführte Auflösbarkeitsaxiom Iα beweisbar ist[11]). Beispiele dieser Art finden sich wieder bei L. E. DICKSON[12]). Insbesondere gehören hierher die endlichen *vollständigen Fastkörper* im Sinne von H. ZASSENHAUS [*30*], das sind im wesentlichen endliche Zahlensysteme der fünften Stufe mit assoziativer Multiplikation[13]).

---

[8]) Wegen des Zusammenhangs von Geometrie und Alternativkörper s. R. MOUFANG [*15*], [*16*], ferner M. HALL [*10*]. Daß jeder Alternativkörper assoziativ oder eine CAYLEY-DICKSON-Algebra (vgl. L. E. DICKSON [*9*], S. 264 f.) über seinem Zentrum ist, bewiesen R. H. BRUCK und E. KLEINFELD ([*6*] für Charakteristik $\neq 2$; [*12*] für Charakteristik 2) und, unabhängig davon, L. A. SKORNIAKOW ([*21*] für Charakteristik $\neq 2, 3$).

[9]) (lat.) *quaterni* je vier, *octoni* je acht.

[10]) Siehe z. B. L. E. DICKSON [*8*], S. 69. Als neuere Arbeit zu diesem Gegenstand vgl. A. A. ALBERT [*2*]. — Geometrien über Zahlensystemen der vierten und fünften Stufe wurden zuerst von O. VEBLEN und J. H. M. WEDDERBURN [*27*] konstruiert.

[11]) R. STETTLER [*24*].

[12]) L. E. DICKSON [*8*], S. 71.

[13]) Der Zusammenhang stellt sich genauer folgendermaßen dar: Jedes endliche assoziative Zahlensystem der fünften Stufe ist ein vollständiger Fastkörper; das ZASSEN-

Ein auf L. E. Dickson zurückgehendes unendliches Modell, in dem die Axiome I 1—3, $\bar{\alpha}$, II 1—3, 5 gelten, findet sich in multiplikativ inversisomorpher Gestalt bei K. Reidemeister [*20*], S. 43; dabei ist I $\bar{\alpha}$ das folgende Axiom:

I $\bar{\alpha}$. $a\,x+b\,x=c$ eindeutig lösbar für $a+b\neq 0$.

Hierzu läßt sich zeigen: Unter Voraussetzung der Axiome I 1—3, II 1, 2 folgt I α aus I $\bar{\alpha}$; umgekehrt gilt unter Voraussetzung von I α dann und nur dann I $\bar{\alpha}$, wenn -1 zum assoziativen Zentrum gehört.

Zum Beweise der ersten Behauptung genügt der Nachweis der Formel $(-a)\,b=-a\,b$, wobei man sich auf $b\neq 0$ beschränken kann. Es gibt ein c und wegen $b\neq 0$ weiter ein d, daß $0=(-a)\,b+c=(-a)\,b+d\,b$ ist. Also gestattet die Gleichung $(-a)\,x+d\,x=0$ die beiden Lösungen $x=b$ und $x=0$. Unter der Annahme $-a+d\neq 0$ wäre diese Gleichung eindeutig lösbar, folglich $b=0$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $-a+d=0$, $(-a)\,b+a\,b=0$.

Um die zweite Behauptung einzusehen, genügt es nunmehr zu zeigen, daß $(-a)\,b=-a\,b$ dann und nur dann gilt, wenn -1 zum assoziativen Zentrum gehört. Nach B. H. Neumann [*18*] folgt aus $(-1)\cdot((-1)\cdot a)=(-1)^2\cdot a$ die die Kommutativität der Addition nach sich ziehende Formel $(-1)\cdot a=-a$, aus der sich $(-a)\,b=((-1)\cdot a)\,b=(-1)\cdot a\,b=-a\,b$ folgern läßt. Umgekehrt ergibt sich aus $(-a)\,b=-a\,b$ und der Formel $a(-b)=-a\,b$, die bekanntlich bereits aus der Linksdistributivität folgt, $(-1)\cdot a=-a=a\cdot(-1)$. Dann multipliziert sich aber -1 stets assoziativ.

Die Formel $(-1)\cdot a=-a$ ist bekanntlich aus den Axiomen I 1—3, α, II 1, 2 nicht beweisbar[14]). Gilt diese Formel nicht, so gehört -1 nicht zum assoziativen Zentrum.

Weitere Modelle der fünften Stufe mit nichtassoziativer Multiplikation kann man aus solchen der vierten Stufe herleiten: Mittels eines Zahlensystems der vierten Stufe läßt sich eine affine Geometrie konstruieren, in der die Sätze δ und $\boldsymbol{d}^{\mathfrak{Y}}$ gelten. Im allgemeinen ist $\boldsymbol{d}^{\mathfrak{X}}$ dann nicht erfüllt. Durch Vertauschung der Scharen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gelangt man so zu einer Geometrie der fünften Stufe. Algebraisch stellt sich dieser Übergang folgendermaßen dar:

$$a\oplus b=b+a$$

$$\bar{a}\cdot(a\odot b)=b \quad \text{mit} \quad \bar{a}\cdot a=1 \quad (a\neq 0)$$

$$0\odot a=0.$$

Haussche Axiom „aus $\mu\,x=x$ und $x\neq 0$ folgt $\mu=1$" ergibt sich daraus, daß nach I α aus $\mu\neq 1$ $x=0$ folgt. Umgekehrt genügt jeder endliche vollständige Fastkörper, für den zusätzlich $0\cdot a=0$ festgesetzt wird, den algebraischen Axiomen der fünften Stufe sowie dem assoziativen Gesetz der Multiplikation.

[14]) Gegenbeispiel hierfür bis auf multiplikative inverse Isomorphie im Zahlensystem U von M. Hall ([*10*] Anhang II).

§ 6. Über die Kommutativität der Addition und den affinen kleinen Desarguesschen Satz.

0. Wir beweisen in diesem Paragraphen die Kommutativität der Addition für ein Zahlensystem, das den Axiomen I 1—3, II 1, 2 und der Auflösbarkeitsforderung Iα genügt (§ 6.2). Den Beweis leiten wir aus unserem geometrischen Beweis des Satzes her, daß in der affinen Ebene aus dem affinen kleinen Desarguesschen Satz für zwei ausgezeichnete Richtungen dieser Satz für jede Richtung folgt (§ 6.1)[15]).

Sodann konstruieren wir aus beliebigen nicht-Abelschen Gruppen Parallelgewebe mit unendlich vielen Parallelenscharen, in denen der affine kleine Desarguessche Satz ausschließlich für zwei Richtungen gilt (§ 6.3). Die Antwort auf die REIDEMEISTERsche Frage[16]), ob aus dem affinen kleinen Desarguesschen Satz für zwei Richtungen dieser allgemein folgt, fällt also verschieden aus, je nachdem man sie für die affine Ebene oder für das Parallelgewebe formuliert.

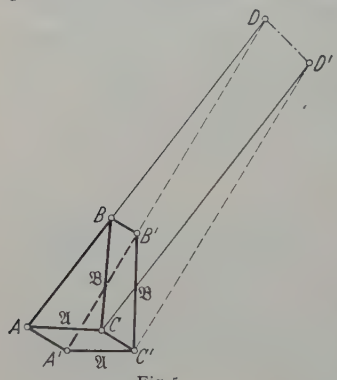

Fig. 5.

Es ist ein offenes Problem geblieben, ob das kommutative Gesetz der Addition aus den Axiomen I 1—3, II 1, 2 auch ohne die Auflösbarkeitsforderung Iα folgt. Unter Voraussetzung der Endlichkeit ist, wie in § 5 bemerkt wurde, das Axiom Iα und somit auch die Kommutativität der Addition beweisbar; wir führen noch einen zweiten, gruppentheoretischen Nachweis dieses Sachverhalts durch den Beweis, daß alle endlichen Gruppen mit transitiver Automorphismengruppe Abelsch sind (§ 6.4)[17]).

1. Satz 3. *Aus* $\delta_{\mathfrak{A}}$ *und* $\delta_{\mathfrak{B}}$ ($\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$) *folgt in der affinen Ebene* δ.

Es genügt der Nachweis von δ für den Spezialfall, daß ein Paar entsprechender Dreiecksseiten aus $\mathfrak{A}$-Geraden und ein zweites Paar aus $\mathfrak{B}$-Geraden besteht, da dieser Spezialfall bereits den allgemeinen Satz nach sich zieht[18]).

Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke und hierbei AC und $A'C'$ $\mathfrak{A}$-Geraden, BC und $B'C'$ $\mathfrak{B}$-Geraden und AA', BB' und CC' paarweise parallel (Fig. 5).

Annahme: $A'B'$ sei nicht parallel zu AB.

Dann haben die Geraden AB, $A'B'$ genau einen Schnittpunkt D und entsprechend die Parallele zu AB durch C und die Parallele zu $A'B'$ durch

[15]) Ein Beweis des geometrischen Satzes von § 6.1 findet sich auch bei W. KLINGENBERG [*13*] und ein Beweis des algebraischen Satzes von § 6.2 auch bei G. PICKERT [*19*]. Die hier gegebenen sehr kurzen Beweise sind unabhängig davon erfolgt.

[16]) K. REIDEMEISTER [*20*], S. 145.

[17]) Dieser gruppentheoretische Satz folgt auch unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2 der 1951 veröffentlichten Arbeit [*5*] von R. H. BRUCK. Der in § 6.4 dieser Arbeit angegebene Beweis ist im gleichen Jahre vom Verf. unabhängig davon gefunden worden.

[18]) Man kann etwa zunächst durch zweimalige Anwendung des obigen Spezialfalles den etwas allgemeineren Satz herleiten, bei dem ein Paar entsprechender Dreiecksseiten aus $\mathfrak{A}$-Geraden besteht, und erhält hieraus in analoger Weise den Satz δ in voller Allgemeinheit.

C' genau einen Schnittpunkt D', und es ist $D \neq D'$. Nach $\delta_{\mathfrak{A}}$, angewandt auf die Dreiecke $AA'D$, $CC'D'$ ist DD' eine $\mathfrak{A}$-Gerade; andererseits ist DD' nach $\delta_{\mathfrak{B}}$, angewandt auf die Dreiecke $BB'D$, $CC'D'$ eine $\mathfrak{B}$-Gerade, was einen Widerspruch enthält.

2. Satz 4. *Aus den algebraischen Axiomen* I 1–3, α, II 1, 2 *folgt die Kommutativität der Addition* II 3.

Annahme. Es gebe zwei additiv nicht vertauschbare Zahlen a und b.

Dann ist die Gleichung

$$-(a+b)\,x+(b+a)\,x=a$$

eindeutig nach x auflösbar. Die Lösung sei γ genannt. Nun ist

$$\begin{aligned}-(a+b)(\gamma+1)+(b+a)(\gamma+1) &= -(a+b)-(a+b)\gamma+(b+a)\gamma+(b+a)\\ &= -b-a+a+b+a\\ &= a,\end{aligned}$$

d.h. $\gamma+1$ ist ebenfalls Lösung der obigen Gleichung, und aus der Eindeutigkeit der Lösung im Falle der Richtigkeit der obigen Annahme folgt $\gamma+1=\gamma$, also $1=0$.

Dieser Beweis läßt sich auch aus dem Beweis des vorstehenden Satzes 3 herleiten:

Man setze in Fig. 5 speziell $C=(0,0)$, $A=(1,0)$, $B=(0,a+b)$ und $B'=(1,a)$. Dann folgt $C'=(1,-b)$ und $A'=(2,-b)$. Es ergibt sich für die Gerade AB die Gleichung

$$y+(a+b)\,x=a+b$$

und für die Gerade $A'B'$

$$y+(b+a)\,x=a+b+a.$$

Somit entspricht der Parallelität von AB und $A'B'$ die Relation $a+b=b+a$. Die gegenteilige Annahme, daß die Geraden einen Schnittpunkt $D=(\gamma,\delta)$ bestimmen, besagt, daß sich das Gleichungssystem der betreffenden Geraden eindeutig nach x und y auflösen läßt, oder, indem man y eliminiert, daß die Gleichung

$$-(a+b)\,x+(b+a)\,x=a$$

eine eindeutige Lösung $x=\gamma$ hat.

Diese Ausführungen genügen, den inneren Zusammenhang beider Beweise deutlich zu machen.

Wir geben noch eine Variante des Beweises zu Satz 4, die an Stelle des distributiven Gesetzes ein Auflösbarkeitsaxiom benutzt, das (wegen $a+1-a\neq 0$) aus dem linksdistributiven Gesetz folgt und in Zahlensystemen mit Abelscher Additionsgruppe von selbst erfüllt ist:

Satz 4a. *Aus den algebraischen Axiomen* I 1–3, II 1 *und der Forderung, daß die Gleichung*

$$-a\,x+b\,x=c$$

für $a \neq b$ mindestens eine Lösung und die Gleichung

$$y\,a + y - y\,a = b$$

höchstens eine Lösung besitzt, folgt die Kommutativität der Addition II 3.

Annahme. Es sei $a+b \neq b+a$. Dann besitzt die Gleichung

$$-(a+b)\,x + (b+a)\,x = a$$

eine Lösung $x = \gamma$. Nun ist

$$\begin{aligned} -(a+b)\,\gamma + (b+a)\,\gamma &= a \\ &= a + b + a - a - b \\ &= (a+b) - (a+b)\,\gamma + (b+a)\,\gamma - (b+a), \end{aligned}$$

also

$$(a+b)\,\gamma + (a+b) - (a+b)\,\gamma = (b+a)\,\gamma + (b+a) - (b+a)\,\gamma,$$

im Widerspruch zur zweiten Auflösbarkeitsforderung.

3. Sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe, additiv geschrieben. Wir bilden formale Potenzreihen einer Unbestimmten t

$$A = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i \qquad (n \text{ ganz rational}, \ a_i \in \mathfrak{G}) \tag{1}$$

und definieren

$$t^0 \cdot a = a \quad \text{für alle } a \in \mathfrak{G} \tag{2}$$

$$t^i \cdot 0 = 0 \quad \text{für } i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{3}$$

Sei $A = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i$ und $B = \sum_{i=m}^{\infty} t^i b_i$. Durch Vorsetzen von Nullen kann man erreichen, daß $n = m$ wird. Dann definieren wir die Gleichheit zweier Potenzreihen als Koeffizientengleichheit, die Summe

$$A + B = \sum_{i=n}^{\infty} t^i (a_i + b_i) \tag{4}$$

und die Linksmultiplikation mit einer Potenz von t

$$t^k \cdot A = \sum_{i=n}^{\infty} t^{i+k} a_i, \tag{5}$$

$$t^k \cdot t^l = t^{k+l}. \tag{6}$$

Die A's bilden einen *Fastkörper*[19]. Denn die in (4) definierte Addition erfüllt die Gruppenpostulate, und es ist

$$t^l \cdot (t^k \cdot A) = t^l \sum t^{i+k} a_i = \sum t^{i+k+l} a_i = (t^l t^k) \cdot A,$$

aus $t^i A = A$ und $A \neq 0$ folgt $i = 0$, und

$$t^k (A + B) = \sum t^{i+k} (a_i + b_i) = \sum t^{i+k} a_i + \sum t^{i+k} b_i = t^k A + t^k B.$$

[19]) Vgl. H. ZASSENHAUS [30].

Satz 5. *In dem durch die Definitionen* (1) *bis* (6) *definierten Fastkörper ist die Gleichung*

$$-t^k \cdot X + t^l \cdot X = A$$

für $k \neq l$ *eindeutig nach* X *lösbar.*

Es genügt wegen der Fastkörpereigenschaften die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung

$$-X + t^k \cdot X = A \quad \text{für} \quad k \neq 0$$

nachzuweisen.

Wir machen den vorläufigen Ansatz $X = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^i x_i$ und erhalten

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^i(-x_i) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^{i+k} x_i = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} t^i(-x_i + x_{i-k}) = \sum_{i=n}^{\infty} t^i a_i, \tag{7}$$

folglich

$$x_i = x_{i-k} \quad \text{für alle} \quad i < n. \tag{8}$$

Falls k positiv ist, so folgt hieraus $x_i = 0$ für alle $i < n$, denn im Falle $x_j = \xi \neq 0$ $(j < n)$ wäre $x_j = x_{j-k} = x_{j-2k} = \cdots$ (ad inf.) $\cdots = \xi$, im Widerspruch zur Definition (1). Sodann folgt aus (7)

$$x_i = x_{i-k} - a_i \quad \text{für} \quad i \geqq n,\ k > 0, \tag{9}$$

und die x_i sind sukzessiv in eindeutiger Weise bestimmbar. Falls k negativ ist, so geht mit $k' = -k$ (8) über in

$$x_{i+k'} = x_i \quad \text{für alle} \quad i < n,$$

und es folgt $x_{i+k'} = 0$ für alle $i < n$. Endlich folgt aus (7)

$$x_{i+k'} = x_i + a_i \quad \text{für} \quad i \geqq n,\ k' = -k > 0, \tag{10}$$

und auch in diesem Falle bestimmen sich die x_i sukzessiv in eindeutiger Weise.

Wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ abzählbar ist, kann man einen *abzählbaren* Fastkörper, in dem Satz 5 gilt, erhalten, indem man ihn aus den Gruppenelementen durch fortgesetzte Addition, Linksmultiplikation mit einer Potenz von t und Lösung einer Gleichung $-X + t^k X = A$ *konstruiert.*

Wir definieren nun mit diesem Fastkörper Punkte als geordnete Elementepaare (A, B) und sodann folgende Typen von Geraden:

$\mathfrak{X}$-Gerade: $\quad Y = \text{Const.}$

$\mathfrak{Y}$-Gerade: $\quad X = \text{Const.}$

$\mathfrak{Z}_k$-Gerade: $\quad Y + t^k X = \text{Const.} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

Satz 6. *Die vorstehend definierten Punkte und Geraden bilden ein Parallelgewebe, in dem die Sätze* $\delta_{\mathfrak{X}}$ *und* $\delta_{\mathfrak{Y}}$ *gültig sind.*

Zunächst inzidiert jeder Punkt (A, B) mit genau einer $\mathfrak{X}$-, einer $\mathfrak{Y}$- und, bei vorgegebenem ganzen rationalen k, einer $\mathfrak{Z}_k$-Geraden, nämlich mit $Y = B$, $X = A$ und $Y + t^k X = B + t^k A$. Verschiedene $\mathfrak{X}$-Geraden sind ersichtlich parallel, ebenso verschiedene $\mathfrak{Y}$-Geraden und verschiedene $\mathfrak{Z}_k$-Geraden mit gleichem k. Dagegen haben zwei Geraden verschiedener Scharen genau einen Schnittpunkt:

1. $Y = B, \quad X = A: \quad (A, B)$
2. $Y = A, \quad Y + t^k X = B: \quad (t^{-k}(-A + B), A)$
3. $X = A, \quad Y + t^k X = B: \quad (A, B - t^k A)$
4. $Y + t^k X = A, \quad Y + t^l X = B \quad$ mit $\quad k \neq l$:

Durch Elimination von Y ergibt sich für X die Gleichung

$$-t^k X + t^l X = -A + B,$$

die nach Satz 5 eindeutig lösbar ist; folglich ist der Schnittpunkt eindeutig bestimmt.

Aus dem assoziativen Gesetz der Addition und dem linksseitigen Distributivgesetz für die Multiplikation mit einem Richtungsfaktor t^k folgt die Existenz von transitiven Translationen $X' = X$, $Y' = C + Y$ längs $\mathfrak{Y}$-Geraden und von transitiven Translationen $X' = X + C$, $Y' = Y$ längs $\mathfrak{X}$-Geraden; daraus folgt $\delta_{\mathfrak{Y}}$ und $\delta_{\mathfrak{X}}$.

Wenn die zugrunde gelegte Gruppe $\mathfrak{G}$ Abelsch ist, dann läßt sich auf demselben Wege auch der affine kleine Desarguessche Satz δ für alle Richtungen des Gewebes beweisen. Ist sie nicht Abelsch, dann versagt der Beweis, und es kann dann δ auch für keine andere Richtung als $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gelten, da im Parallelgewebe aus dem affinen kleinen Desarguesschen Satz für drei verschiedene Richtungen dieser allgemein folgt und sich dann alle THOMSENschen Dreiecke T schließen würden[20]), und $T_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}_0}$ würde nach THOMSEN [26] die Kommutativität von $\mathfrak{G}$ besagen (s. Fig. 6).

Unter Berücksichtigung der Resultate von THOMSEN [26] folgt

Satz 7. *Jedes 3-Gewebe, in dem T (und folglich auch R[21])) gilt, läßt sich zu einem Parallelgewebe erweitern, in dem δ allgemein gilt. Jedes 3-Gewebe, in dem R aber nicht T gilt, läßt sich zu einem Parallelgewebe erweitern, in dem δ für genau zwei verschiedene Translationsrichtungen gilt.*

Es ergibt sich als einfache Folgerung:

Satz 8. *Im Parallelgewebe ist aus $\delta_{\mathfrak{A}}$ und $\delta_{\mathfrak{B}}$ der Satz δ nicht beweisbar.*

4. Wir beweisen nun die Kommutativität der Addition für ein endliches Zahlensystem, das den Axiomen I 1–3, II 1, 2 genügt, auf gruppentheoretischem Wege.

---

[20]) Vgl. K. REIDEMEISTER [20], S. 106.

[21]) Die REIDEMEISTER-Figur R (Fig. 7) besagt für ein 3-Gewebe die Darstellbarkeit durch eine Gruppe; vgl. [20], [26], [4]. Wegen des Beweises von R aus T verweisen wir auf die genannte Literatur.

Die additive Gruppe des Zahlensystems hat die Eigenschaft: Zu zwei vom Einheitselement verschiedenen Elementen a, b gibt es stets einen Automorphismus, der a in b überführt. Das läßt sich auch so formulieren: Die Gruppe besitzt eine transitive Automorphismengruppe.

Beweis. Nach I 3 gibt es zu a, $b \neq 0$ ein von Null verschiedenes c, daß $c\,a = b$ ist. Durch $\mathfrak{A}(x) = c\,x$ ist für das Zahlensystem eine eineindeutige Abbildung definiert, die a in b überführt. $\mathfrak{A}(x)$ ist aber auch ein Automorphismus der additiven Gruppe[22]), denn

$$\mathfrak{A}(x+y) = c\cdot(x+y) = c\,x + c\,y = \mathfrak{A}(x) + \mathfrak{A}(y).$$

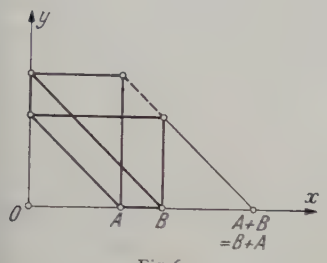

Fig. 6.

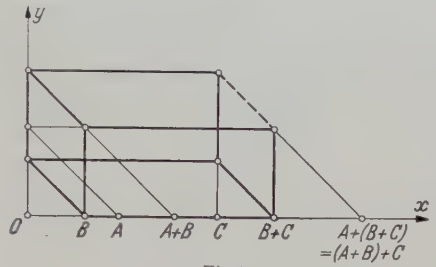

Fig. 7.

Um die Kommutativität der Addition für das gegebene Zahlensystem zu beweisen, genügt der Nachweis, daß alle endlichen Gruppen mit transitiver Automorphismengruppe Abelsch sind.

Satz 9. *Jede endliche Gruppe mit transitiver Automorphismengruppe ist eine Abelsche p-Gruppe vom Typus $(p, p, \ldots, p)$.*

Beweis. Zunächst haben alle vom Einheitselement verschiedenen Elemente gleiche Ordnung. Sodann muß diese Ordnung eine Primzahl p sein, da es sonst in der von einem Element erzeugten zyklischen Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$ Elemente kleinerer Ordnung geben würde. Daraus folgt, da es zu jedem Primteiler p' der Gruppenordnung stets in der Gruppe ein Element von der Ordnung p' gibt, daß $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe ist. Nach einem bekannten Satz besitzt jede p-Gruppe ein vom Einheitselement e verschiedenes Zentrum[23]); andererseits ist das Zentrum eine charakteristische Untergruppe[24]) und folglich das Zentrum einer Gruppe mit transitiver Automorphismengruppe entweder das Einheitselement e oder die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$. Also ist $\mathfrak{G}$ Abelsch, und da jedes von e verschiedene Element von $\mathfrak{G}$ die Ordnung p hat, so ist Satz 9 bewiesen.

Umgekehrt besitzen die Gruppen vom Typ $(p, p, \ldots, p)$ eine transitive Automorphismengruppe, und sie treten auch alle als additive Gruppe eines Zahlensystems, zumindest eines der ersten Stufe, auf; so ist die Gruppe $(p, p, \ldots, p)$ isomorph der additiven Gruppe des Galois-Feldes $\Gamma(p, k)$.
k-mal

[22]) Anmerkung. Die Menge dieser speziellen Automorphismen $\mathfrak{A}_c(x) = c\,x$ $(c \neq 0)$ besitzt nicht notwendig die Gruppeneigenschaft, da das assoziative Gesetz der Multiplikation nicht gefordert ist.

[23]) Siehe etwa A. Speiser [*23*], S. 69.

[24]) Siehe etwa A. Speiser [*23*], S. 124f.

§ 7. Modelle zur sechsten Stufe.

1. Bisher haben wir die Modelle von der algebraischen Seite her entwickelt. Auf der sechsten Stufe steht uns ein geometrisches Modell unmittelbar zur Verfügung, nämlich das MOULTONsche Modell einer nicht-Desarguesschen Geometrie[25]), das sich anschaulich unter Bezugnahme auf die gewöhnliche kartesische Geometrie etwa folgendermaßen beschreiben läßt:

Die aus der linken Halbebene kommenden, die y-Achse spitz treffenden Geraden werden an der y-Achse im Verhältnis 1:2 zur Achse hin gebrochen; die übrigen Geraden bleiben unverändert.

Dieses Modell gestattet transitive Translationen längs der y-Achse, und es gilt daher der affine kleine Desarguessche Satz in $\mathfrak{Y}$-Richtung. Für alle übrigen Richtungen gilt er nicht, wie man sich leicht überlegt.

Das zugehörige Zahlensystem lautet

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{für } a \text{ oder } b \geqq 0 \\ \frac{1}{2} a\, b & \text{für } a \text{ und } b \leqq 0. \end{cases} \qquad (a, b \text{ reelle Zahlen})$$

In ihm gelten die algebraischen Axiome I 1, 2, 3, α, β, II 1, 3, 5, 6, III, IV, d.h. alle Axiome der reellen Zahlen[26]) mit Ausnahme der distributiven Gesetze (z.B. ist $(-1) \odot (1-1) = (-1) \odot 0 = 0$, dagegen $(-1) \odot 1 + (-1) \odot (-1) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$).

Das Zahlensystem der MOULTONschen Geometrie ist zugleich ein Beispiel für ein Zahlensystem, in dem kein Körper enthalten ist[27]). Denn jeder *Teilbereich* irgendeines Zahlensystems, der unter Beibehaltung der Verknüpfungen ebenfalls ein Zahlensystem ist, enthält die Null und die Eins und den hieraus durch fortgesetzte Addition, Subtraktion und Multiplikation erzeugten Ring. Dieser Ring ist in unserem Falle bereits nicht distributiv (s. obiges Gegenbeispiel)[28]). Alle im Zahlensystem der MOULTONschen Geometrie enthaltenen Zahlensysteme enthalten also diesen nichtdistributiven Ring, folglich kann sich unter ihnen kein Körper befinden.

2. Das MOULTONsche Modell läßt sich auf verschiedene Weise verallgemeinern. Zunächst nehmen wir eine geometrische Verallgemeinerung vor.

[25]) F. R. MOULTON [*17*]; D. HILBERT [*11*], § 23.

[26]) Wegen der Axiome III und IV s. D. HILBERT [*11*], Anhang VI. Das Vollständigkeitsaxiom IV 2 ist hier sinngemäß so zu verstehen: Die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Beziehungen und der Axiome I, II 1, 3, 5, 6, III, IV 1 keiner Erweiterung mehr fähig ist.

[27]) Dagegen enthält jedes Zahlensystem der ersten bis fünften Stufe einen Primkörper.

[28]) Die Definition eines „Ringes" ist hier natürlich allgemeiner zu fassen als üblich. Der hier speziell betrachtete Ring der „ganzen rationalen" Zahlen des Zahlensystems der MOULTON-Geometrie besteht nicht allein aus den positiven und negativen „ganzen" Zahlen 0, ± 1, ± 2, ...; dieser Bereich ist nur gegenüber der Addition und Subtraktion, nicht aber gegenüber der Multiplikation abgeschlossen. Der betreffende Ring besteht vielmehr aus den Zahlen $\pm \frac{a}{2^k}$, wo a und k natürliche Zahlen oder Null sind.

In einem gewöhnlichen ebenen kartesischen Koordinatensystem sei ein Kurven-3-Gewebe gegeben (d.h. drei Scharen stetiger Kurven mit der Eigenschaft, daß zwei beliebige Kurven von verschiedenen Scharen sich in höchstens einem Punkt treffen)[29]). Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß zwei der Scharen die der Achsenparallelen, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, sind. Dann wird also jede Kurve der dritten Schar durch eine stetige, streng monotone Funktion $y = f(x)$ dargestellt.

Einschränkend verlangen wir für die dritte Schar: Die Kurven der dritten Schar überdecken die gesamte (x, y)-Ebene mit Ausnahme des Ursprungs einfach und lückenlos. Alle Kurven der Schar gehen durch den Koordinatenursprung. Die x- und die y-Achse gehören zur dritten Schar. (Für die Punkte der Koordinatenachsen gelten also die Gewebeeigenschaften nicht.) Die Ordinaten*differenz* je zweier verschiedener Kurven der dritten Schar (exklusive der y-Achse) ist eine überall stetige *streng monotone* beiderseits unbeschränkte Funktion von x, und zu jedem Intervall $\langle a, b\rangle$ und jeder positiven Zahl H gibt es stets Kurven $y = f(x)$ der dritten Schar, für die $f(b) - f(a) > H$ und solche, für die $f(b) - f(a) < -H$ ist. (Dann gibt es in dieser Schar aus Gründen der Stetigkeit und Monotonie zu jedem h auch genau eine Kurve $y = f(x)$, daß $f(b) - f(a) = h$ ist.)

Dieses Kurvengewebe läßt sich zu einer zweiparametrigen Kurvenschar erweitern, indem man zu den Kurven des 3-Gewebes die Kurven hinzufügt, die aus der dritten Schar (unter Ausschluß der x- und y-Achse) durch Translation in $\mathfrak{Y}$-Richtung hervorgehen.

In der so erhaltenen zweiparametrigen Kurvenschar gelten die Hilbertschen Axiome I 1—3, IV*, wie wir im folgenden zeigen.

Zu zwei verschiedenen Punkten (x_1, y_1), (x_2, y_2) der kartesischen Ebene gibt es genau eine Verbindungskurve aus der zweiparametrigen Schar; denn für $x_1 = x_2$ ist es eine Gerade $x = c$ und für $y_1 = y_2$ eine Gerade $y = c$; für $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ gibt es auf Grund der Voraussetzungen, wenn man $y_2 - y_1 = h$ setzt, genau eine Kurve aus der Schar durch O, für die $f(x_2) - f(x_1) = h$ ist, und die Parallelkurve durch (x_1, y_1) geht auch durch (x_2, y_2) und ist die einzige Kurve dieser Art.

Zwei Kurven der zweiparametrigen Schar, die nicht parallel zur y-Achse sind und nicht durch Translation in $\mathfrak{Y}$-Richtung aus derselben Kurve hervorgegangen sind, haben genau einen gemeinsamen Punkt, denn ihre Ordinatendifferenz ist bis auf eine additive Konstante nach Voraussetzung eine überall stetige, streng monotone, beiderseits unbeschränkte Funktion von x; die Ordinatendifferenz ist daher selbst eine Funktion dieser Art und hat folglich genau eine Nullstelle. Da durch Translation in $\mathfrak{Y}$-Richtung auseinander hervorgegangene Parallelkurven konstante Ordinatendifferenz haben und sie durch eine eindeutige Funktion von x dargestellt werden, so sind sie entweder miteinander identisch oder können sich nicht überschneiden, sind punktfremd, d.h. parallel. Da schließlich die Parallelen zu einer festen Kurve

[29]) Vgl. W. Blaschke u. G. Bol [4], §§ 1—2.

(einschließlich der $\mathfrak{X}$- und $\mathfrak{Y}$-Geraden) die kartesische Ebene lückenlos überdecken, so gilt für die behandelte zweiparametrige Kurvenschar das Parallelenaxiom in seiner verschärften Form. Ersichtlich ist auch das Existenzaxiom I 3 erfüllt.

Da dieses Modell transitive Translationen längs $\mathfrak{Y}$-Geraden gestattet, so ist in ihm der spezielle kleine Desarguessche Satz $\delta_{\mathfrak{Y}}$ gültig.

Gilt in dem Modell dann noch $\delta_{\mathfrak{X}}$, so erweist es sich, da alle die Axiome der fünften Stufe erfüllenden archimedisch anordenbaren Modelle Modelle der ersten Stufe sind ([*20*], S. 108), inzidentiell isomorph der ebenen kartesischen Geometrie und schließlich, wegen der Stetigkeit, als ihr topologisches Abbild.

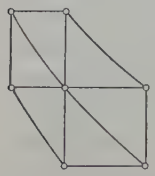

Fig. 8.

Abgesehen von diesem Sonderfall ist jedes Modell der betrachteten Art ein Modell der sechsten Stufe[30]).

Umgekehrt läßt sich übrigens jede stetige affine Ebene, die transitive Translationen längs einer Richtung gestattet, auf ein derartiges Modell zurückführen.

In den Zahlensystemen dieser stetigen Geometrien der sechsten Stufe ist auf Grund des BLASCHKEschen Hauptsatzes über Sechseckgewebe das kommutative Gesetz der Addition II 3 eine Folge der Axiome der sechsten Stufe und der Stetigkeit. In dem Kurven-3-Gewebe, das aus den Punkten der Ebene und den Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$[31]) besteht, schließen sich als Folge des Satzes $\delta_{\mathfrak{Y}}$ alle REIDEMEISTER-Figuren ([*20*], S. 96). Dann schließen sich speziell auch alle „BRIANCHON-Sechsecke“[32]), das sind Sechsecke, deren sämtliche Seiten und Diagonalen (letztere durch einen Punkt gehend) Kurven des 3-Gewebes sind (vgl. Fig. 8). Ein Kurvengewebe, in dem sämtliche BRIANCHON-Sechsecke sich schließen, nennt man ein „Sechseckgewebe“. Nach dem Hauptsatz über Sechseckgewebe[33]) lassen sich alle aus stetigen Kurven gebildeten Sechseckgewebe auf drei Scharen paralleler Geraden (der euklidischen Geometrie) topologisch abbilden, etwa auf die Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ der gewöhnlichen ebenen kartesischen Geometrie. Da durch diese drei Scharen die Addition beschrieben wird, so ist damit die Isomorphie der additiven Gruppe des Zahlensystems, das die zweiparametrige Kurvenschar analytisch beschreibt, mit der additiven Gruppe der reellen Zahlen gezeigt. Insbesondere gilt daher in jedem Zahlensystem der betrachteten Art das kommutative Gesetz der Addition[34]).

[30]) Die von OSWALD WYLER [*29*] angegebene projektive Modifikation der MOULTONschen Geometrie mit zwei „Achsen“ und die von KENNETH LEVENBERG [*14*] untersuchten verallgemeinerten MOULTON-Geometrien sind spezielle Fälle der oben konstruierten Klasse von Geometrien der sechsten Stufe.

[31]) $\mathfrak{E}$ ist nach § 2 unter den von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ verschiedenen Scharen von Parallelkurven beliebig wählbar.

[32]) W. BLASCHKE u. G. BOL [*4*], § 2.

[33]) W. BLASCHKE u. G. BOL [*4*], § 2 (insbesondere S. 10).

[34]) Zahlensysteme der sechsten Stufe, in denen das kommutative Gesetz der Addition nicht gilt, wurden von G. PICKERT [*19*] konstruiert.

Es wäre zu untersuchen, ob auch die Isomorphie der multiplikativen Gruppe des Zahlensystems mit der multiplikativen Gruppe der reellen Zahlen allein aus dem assoziativen Gesetz der Multiplikation und den Stetigkeitsvoraussetzungen folgt. (Für das Zahlensystem der MOULTONschen Geometrie ist diese multiplikative Isomorphie nach Ausführung der eineindeutigen Abbildung $a \to a$ bei positivem a und $a \to \frac{1}{2} a \,|/\, 2$ bei negativem a offenbar.)

Als Beispiel für ein Zahlensystem der besprochenen Art, in dem von den Rechengesetzen (Axiome der Gruppe II) nur das assoziative und kommutative Gesetz der Addition erfüllt sind, geben wir ohne Beweis das folgende an:

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{für } a \geqq 0 \\ a \cdot b & \\ a \cdot \frac{b(b+1)}{2} & \text{für } a \leqq 0, \\ \frac{1}{2} a\, b & \end{cases} \quad \begin{cases} b \geqq 1 \\ 0 \leqq b \leqq 1 \\ b \leqq 0. \end{cases} \qquad (a, b \text{ reelle Zahlen})$$

3. Zu weiteren Modellen der sechsten Stufe gelangt man durch algebraische Verallgemeinerung der MOULTON-Geometrie. In ihrem Zahlensystem läßt sich der zugrunde gelegte Körper der reellen Zahlen ohne weiteres durch einen beliebigen angeordneten Körper oder Schiefkörper ersetzen, sodann auch die Anordnung durch eine beliebige Bewertung:

Gegeben sei ein Zahlensystem $\mathfrak{Z}$, das bei den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ den Axiomen der vierten Stufe genügt. In diesem Zahlensystem existiere eine nichttriviale Bewertung w. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien echte Teilmengen der Menge der durch die Funktion w in $\mathfrak{Z}$ angenommenen (reellen) Funktionswerte; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sollen 0 und ∞ nicht enthalten. Ferner sei φ eine von Null und Eins verschiedene Zahl mit $w(\varphi) = 0$, wobei für alle a, b aus $\mathfrak{Z}$ $(a\varphi)\, b = a\,(\varphi\, b) = a\,\varphi\, b$ gelten soll.

Dann läßt sich ein Zahlensystem $\mathfrak{Z}^\circ$ mit den Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ durch folgende Vorschrift erklären:

$$a \oplus b = a + b$$

$$a \odot b = \begin{cases} a \cdot b & \text{für } w(a) \notin \mathfrak{A} \text{ oder } w(b) \notin \mathfrak{B} \\ a\,\varphi\, b & \text{für } w(a) \in \mathfrak{A} \text{ und } w(b) \in \mathfrak{B} \end{cases} \qquad (a, b \in \mathfrak{Z}).$$

Für das Zahlensystem $\mathfrak{Z}^\circ$ beweisen wir die Axiome der sechsten Stufe. Die Axiome I 1–3, II 1, 3 gelten offensichtlich. Daß die Gleichung $-(a \odot x) + (b \odot x) = c$ für $a \neq b$ genau eine Lösung hat, erkennt man folgendermaßen:

Zunächst ergibt sich $w(x) = w(c) - w(-a+b)$.

Für $w(a) = w(b)$ folgt dies aus $-(a \odot x) + (b \odot x) = c$, $-a\,\psi\, x + b\,\psi\, x = (-a+b)\,\psi\, x = c$, wo ψ gleich 1 oder φ, also $w(\psi) = 0$ ist.

Für $w(a) \neq w(b)$ ist $-a\,\psi_1\, x + b\,\psi_2\, x = (-a\,\psi_1 + b\,\psi_2)\, x = c$ mit $w(\psi_1) = w(\psi_2) = 0$, folglich $w(a\,\psi_1) \neq w(b\,\psi_2)$ und somit nach der verschärften Summenregel

$$w(-a\,\psi_1 + b\,\psi_2) = \min\big(w(-a\,\psi_1), w(b\,\psi_2)\big) = \min\big(w(-a), w(b)\big) = w(-a+b),$$

also

$$w(-a+b)+w(x)=w(c).$$

Damit ist $w(x)$ festgelegt, und die Faktoren ψ bzw. ψ_1 und ψ_2 lassen sich bestimmen. Sodann ist im ursprünglichen Zahlensystem die Gleichung

$$-(a\psi)\,x+(b\psi)\,x=c \quad \text{für} \quad a\neq b,\ w(a)=w(b)$$

bzw.

$$-(a\psi_1)\,x+(b\psi_2)\,x=c \quad \text{für} \quad w(a)\neq w(b)$$

eindeutig nach x lösbar. Damit ist Iα für das System $\mathfrak{Z}^\circ$ bewiesen. Iβ läßt sich entsprechend beweisen.

$\mathfrak{Z}^\circ$ ist beiderseits nichtdistributiv; so ist bei $w(a)\in\mathfrak{A}$ und $w(b)\in\mathfrak{B}$ stets

$$a\odot b+1\odot b\neq(a+1)\odot b \quad \text{und} \quad a\odot b+a\odot 1\neq a\odot(b+1).$$

Ist speziell $\mathfrak{Z}$ der Körper der rationalen Zahlen, w eine p-adische Bewertung und $\varphi>0$, so gelten in $\mathfrak{Z}^\circ$ außer den obigen Axiomen noch III 1—3, IV 1. Das Anordnungsaxiom III 4 gilt hier nicht: Für $0<\varphi<1$ wähle man ein beliebiges positives c mit $w(c)\in\mathfrak{A}$ und ein beliebiges positives a mit $w(a)\in\mathfrak{B}$; dann gibt es stets ein b mit $\varphi a<b<a$ und $w(b)=0$, also

$$a>b,\quad c>0,$$

$$c\odot a=c\varphi a<cb=c\odot b.$$

Bei $\varphi>1$ hat man ähnliches. Jedoch gilt die Abschwächung

III 4*: Wenn $a>0$ und $b>0$ ist, so ist auch stets $a\odot b>0$.

Die zugehörigen Geometrien gestatten eine lineare Anordnung der Punkte ihrer Geraden; denn die Anordnung der Punkte auf der x-Achse und der y-Achse und deren Parallelen kann man in Übereinstimmung mit der Anordnung derjenigen Zahlen wählen, die die Abszissen bzw. Ordinaten repräsentieren, und die Anordnung der Punkte auf den übrigen Geraden läßt sich sodann etwa durch Anordnung der Abszissen definieren. Dann aber ist in der Geometrie das PASCH-Axiom verletzt, wie mit den Zahlen a, b, c des obigen Gegenbeispiels gegen das Axiom III 4 das Beispiel des Dreiecks $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,c\odot a)$ und der Geraden $y=(c\odot a)-(c\odot b)$ zeigt.

§ 8. Modelle zur siebenten Stufe.

Unter Verwendung der in § 7.1 benutzten anschaulichen Ausdrucksweise definieren wir folgende Modifikation der MOULTON-Geometrie:

Gegeben sei eine gewöhnliche ebene kartesische Geometrie. Die vier Koordinatenhalbachsen denke man sich alle von 0 ausgehend orientiert, so daß z.B. die Richtung der negativen x-Halbachse der der positiven x-Halbachse entgegengesetzt ist. Nun werden die aus der unteren Halbebene kommenden Geraden, die die positive oder die negative x-Halbachse *stumpf* treffen, im Verhältnis 1:2 zur Achse hin gebrochen und dann schließlich an ihrem Schnittpunkt mit der *positiven* y-Halbachse ebenfalls im Verhältnis 1:2

zur y-Achse hin gebrochen; die übrigen Geraden bleiben unverändert. In Fig. 9 sind zur Veranschaulichung des Modells einige Geraden der Schar $\mathfrak{E}$ der neuen Geometrie und die dazu an der y-Achse spiegelbildlichen Geraden eingezeichnet.

Man bestätigt für dieses Modell leicht die ebenen affinen Axiome. Der Satz $\delta_y^{\mathfrak{A}}$ ist für Dreiecke, deren auf der y-Achse befindlichen Spitzen unterhalb ihrer Grundseite liegen, evident; um ihn auch für Dreiecke einzusehen, deren Spitzen nach oben weisen, strecke man alle Ordinaten der oberen Halbebene um den Faktor 2, was an den Inzidenzverhältnissen nichts ändert. Der Satz $\delta_{\mathfrak{B}}$ gilt jedoch nicht. Wie bei der MOULTONschen Geometrie lassen sich Anordnung und Kongruenz definieren, so daß die HILBERTschen Axiome I 1—3, II, III 1—4, IV*, V erfüllt sind. Das Modell gestattet keine Translationen.

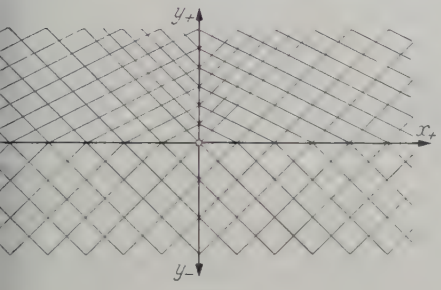

Fig. 9.

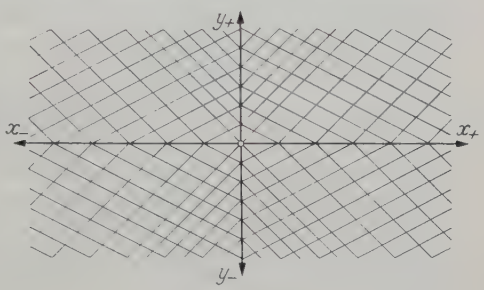

Fig. 10.

In dem entsprechenden Zahlensystem

$$a \oplus b = \begin{cases} a+b & \text{für} \quad a \leq 0 \quad \text{oder} \quad b \geq 0 \\ a+2b \\ \frac{a}{2}+b \end{cases} \Bigg\} \text{ für } \quad a \geq 0, \quad b \leq 0, \quad \begin{cases} |a| \geq |2b| \\ |a| \leq |2b| \end{cases} \qquad (a, b \text{ reell})$$

$$a \odot b = a \cdot b$$

gelten die algebraischen Axiome I 1—3, α^*, β^*, II 5, 6, III, IV; das assoziative und das kommutative Gesetz der Addition und die beiden distributiven Gesetze gelten nicht.

Ein anderes Modell ergibt sich, wenn man, von der gewöhnlichen Geometrie ausgehend, festsetzt, daß alle die positive oder negative x-Halbachse stumpf treffenden und alle die positive oder negative y-Halbachse spitz treffenden Geraden im Verhältnis 1:2 zur x- bzw. y-Achse hin gebrochen werden; lediglich die Geraden durch O und die achsenparallelen Geraden bleiben unverändert (Fig. 10).

In dieser Geometrie gelten außer den ebenen affinen Axiomen die Sätze $\delta_y^{\mathfrak{A}}$ und $\delta_x^{\mathfrak{B}}$. In dem entsprechenden Zahlensystem, dessen Multiplikation wie bei dem vorigen Modell isomorph der Multiplikation der reellen Zahlen ist, gelten die Axiome I 1—3, α^*, β^*, II 2, 4—6, III, IV, während II 1 und II 3 nicht gelten. Es sind also das assoziative Gesetz und das kommutative Gesetz der Addition von den restlichen Axiomen der reellen Zahlen unabhängig.

Es sei noch kurz auf eine Verallgemeinerung dieser Beispiele hingewiesen. Gegeben sei ein ebenes Kurven-4-Gewebe. Drei der Scharen seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ genannt, und jede von ihnen überdecke die gesamte Ebene einfach und lückenlos. Alle Kurven der vierten Schar mögen durch einen Punkt O gehen und die übrige Ebene einfach und lückenlos überdecken. Die $\mathfrak{X}$-, $\mathfrak{Y}$- und $\mathfrak{E}$-Kurve durch O mögen auch der vierten Schar angehören und seien der Reihe nach x, y und e genannt.

Sei nun g eine von x, y und e verschiedene Kurve der vierten Schar und P ein beliebiger Punkt auf ihr. A sei ein von O verschiedener Punkt von y. Die $\mathfrak{X}$-Gerade durch P habe mit e einen Schnittpunkt, und die durch diesen Punkt gezogene $\mathfrak{Y}$-Gerade treffe die $\mathfrak{E}$-Gerade durch A in einem weiteren Punkt. Sodann mögen sich die $\mathfrak{X}$-Gerade durch den erhaltenen Punkt und die $\mathfrak{Y}$-Gerade durch P in einem Punkt P' schneiden. Durchläuft P die Kurve g, so durchläuft P' eine Kurve g', die wir die „Parallelkurve" zu g durch A nennen wollen. Fügt man nun zu dem Kurven-4-Gewebe die so definierten Parallelkurven der Kurven der vierten Schar hinzu, so erhält man eine zweiparametrige Kurvenschar, in der unter gewissen Voraussetzungen für das gegebene Kurven-4-Gewebe die ebenen affinen Axiome erfüllt sind. Dann gilt in dieser Kurvenschar auf Grund der Konstruktion der Parallelkurven (die in der Tat die Rolle der Parallelen übernehmen) stets der Satz $\delta_y^{\mathfrak{X}}$. — Beispiele solcher Geometrien sind die beiden zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Modelle, sodann auch die MOULTONsche und die ebene euklidische Geometrie.

Eine derartige affine Geometrie ist dann und nur dann ein Modell der siebenten Stufe, wenn die drei Scharen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{E}$ *kein Sechseckgewebe* bilden. Denn wenn sich in dem $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{E}$-Gewebe nicht alle Sechsecke schließen, dann können sich erst recht nicht alle REIDEMEISTER-Figuren schließen; folglich genügt dann diese Geometrie nicht den Axiomen der sechsten Stufe, sondern nur denen der siebenten Stufe. Ist andererseits das Gewebe ein Sechseckgewebe, dann läßt sich nach dem Hauptsatz über Sechseckgewebe dieses auf drei Scharen paralleler Geraden topologisch abbilden, es schließen sich also in ihm alle REIDEMEISTER-Figuren und alle THOMSENschen Dreiecke, und es folgt aus $R_{\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{E}}$ und $\delta_y^{\mathfrak{X}}$ der Satz $\delta_{\mathfrak{Y}}$; es ergeben sich in diesem Falle im wesentlichen (d.h. bis auf topologische Abbildungen) die Geometrien von § 7.2.

Literatur.

[1] ALBERT, A. A.: On right alternative algebras. Ann. of Math. (2) **50**, 318—328 (1949). — [2] ALBERT, A. A.: On nonassociative division algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 296—309 (1952). — [3] ARTIN, E.: Coordinates in affine geometry. Rep. Math. Colloq., Ser. II **2**, 15—20 (Notre Dame 1940). — [4] BLASCHKE, W., u. G. BOL: Geometrie der Gewebe. Berlin 1938. — [5] BRUCK, R. H.: Loops with transitive automorphism groups. Pacific J. Math. **1**, 481—483 (1951). — [6] BRUCK, R. H., and E. KLEINFELD: The structure of alternative division rings. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 878—890 (1951). — [7] BRUCK, R. H., and H. J. RYSER: The nonexistence of certain finite projective planes. Canad. J. Math. **1**, 88—93 (1949). — [8] DICKSON, L. E.: Linear algebras. Cambridge 1914. — [9] DICKSON, L. E.: Algebren und ihre Zahlentheorie. Zürich 1927. — [10] HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — Correction to

„Projective planes". Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 473—474 (1949). — [*11*] Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig u. Berlin 1930. — [*12*] Kleinfeld E.: Alternative division rings of characteristic 2. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **37**, 818—820 (1951). — [*13*] Klingenberg, W.: Beziehungen zwischen einigen affinen Schließungssätzen. Abh. Math. Sem. Hbg. **18**, 120—143 (1952). — [*14*] Levenberg, K.: A class of non-Desarguesian plane geometries. Amer. Math. Monthly **57**, 381—387 (1950). — [*15*] Moufang, R.: Die Schnittpunktsätze des projektiven speziellen Fünfecksnetzes in ihrer Abhängigkeit voneinander. Math. Ann. **106**, 755—795 (1932). — [*16*] Moufang, R.: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit. Abh. Math. Sem. Hbg. **9**, 207—222 (1932). — [*17*] Moulton, F. R.: A simple non-desarguesian plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 192—195 (1902). — [*18*] Neumann, B. H.: On the commutativity of addition. J. London Math. Soc. **15**, 203—208 (1940). — [*19*] Pickert, G.: Nichtkommutative cartesische Gruppen. Arch. d. Math. **3**, 335—342 (1952). — [*20*] Reidemeister, K.: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930. — [*21*] Skorniakow, L. A.: Alternativkörper. Ukrain. Mat. J. **2**, No. 1, 70—85 (1950) (Russisch). — [*22*] Skorniakow, L. A.: Rechtsalternativ-Körper. Iswestija Akad. Nauk SSSR., Ser. Mat. **15**, 177—184 (1951) (Russisch). — [*23*] Speiser, A.: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937. — [*24*] Stettler, R.: Über endliche Geometrien. Ann. Acad. Sci. fenn., Ser. A, I. Math.-Phys. **72** (1950). — [*25*] Tarry, G.: Le problème des 36 officiers. C. R. Assoc. franc. Avancement Sci. **1900**, partie 1, 122—123 (1900), partie 2, 170—203 (1901). — [*26*] Thomsen, G.: Schnittpunktssätze in ebenen Geweben. Abh. Math. Sem. Hbg. **7**, 99—106 (1929). — [*27*] Veblen, O., and J. H. M. Wedderburn: Non-desarguesian and non-pascalian geometries. Trans. Amer. Math. Soc. **8**, 379—388 (1907). — [*28*] Witt, E.: Über die Kommutativität endlicher Schiefkörper. Abh. Math. Sem. Hbg. **8**, 413 (1931). — [*29*] Wyler, O.: Order and topology in projective planes. Amer. J. Math. **74**, 656—666 (1952). — [*30*] Zassenhaus, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. Math. Sem. Hbg. **11**, 187—220 (1936).

Marburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 16. Dezember 1953.)

RAJAGOPAL, C. T.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 142—147 (1954)

A Generalization of Tauber's Theorem and some Tauberian Constants (II).

By
C. T. RAJAGOPAL.

Notation. In the first part of this paper [5] I obtained from certain general considerations an important special case of a theorem of H. DELANGE, for a series-to-function transform $\Phi_\lambda^*(x)$ in which λ denotes a sequence such that

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \quad \lim \lambda_n = \infty, \tag{1}$$

and $\lim \lambda_n/\lambda_{n-1} = 1$ additionally. Both the theorem of DELANGE ([2], Théorème 4) and its special case considered by me ([5], Theorem 2b) leave out of consideration the interesting case of "high indices" λ_n which satisfy the condition $\underline{\lim}\, \lambda_n/\lambda_{n-1} > 1$. The object of this note is to cover the case of high indices by a result (Theorem 2) which is applicable not only to $\Phi_\lambda^*(x)$ but also to DELANGE's more general transform $\Phi_\lambda(x)$ whose kernel $K(u)$ is defined in terms of a function $N(x)$ such that

$$\begin{cases} N(x) \in L(0, \infty), & N(x) \log x \in L(0, \infty), \\ K(u) \equiv \int_u^\infty N(x)\, dx, & K(0) = \int_0^\infty N(x)\, dx = 1. \end{cases} \tag{2}$$

The function transformed is the λ-step function:

$$A(u) = \begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_n & \text{for } \lambda_n \leq u < \lambda_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{for } 0 \leq u < \lambda_1, \end{cases} \tag{3}$$

its transform being

$$\Phi_\lambda(x) = \sum_1^\infty a_n K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right), \qquad x > 0, \tag{4}$$

a function supposed to represent a convergent series.

A high-indices theorem. Before stating such a theorem another theorem which invites comparison with it may be mentioned. This latter theorem (given below without proof) is, in fact, a version of a recent result of R. P. AGNEW ([1], Theorem 3.1), with the step function $A(u)$ of (3) taking the place of AGNEW's absolutely continuous function.

Theorem 1. *If* $\{\lambda_n\}$, $A(u)$ *are as in* (1), (3) *respectively, and if also*

$$\lim \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = 1, \qquad \frac{a_n \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = O(1),$$

as $n \to \infty$, *and* x *is related to* n *so that*

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_n}{x} = \alpha < \infty, \qquad \underline{\lim} \frac{\lambda_n}{x} = \underline{\lim} \frac{\lambda_{n+1}}{x} = \beta > 0,$$

then $\Phi_\lambda(x)$ *in* (4) *satisfies the inequality*:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n)| \leq \max\{\tau(\alpha), \tau(\beta)\} \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_n| \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \tag{5}$$

where $\tau(\alpha)$, $\tau(\beta)$ *are values of the function* $\tau(\xi)$, *defined for* $\xi > 0$ *by*

$$\tau(\xi) = \int_0^\xi \frac{|1 - K(u)|}{u}\, du + \int_\xi^\infty \frac{|K(u)|}{u}\, du,$$

and assumed to have a unique turning value (which is of course the least value).

The conclusion (5) *is the best possible in the sense that there is a series* $\sum a_n$ *for which* $0 < \overline{\lim} |a_n| \lambda_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) < \infty$ *and equality prevails in* (5).

The Tauberian constant in (5) is

$$\left\{ \begin{aligned} \max\{\tau(\alpha), \tau(\beta)\} &\leq \int_0^\alpha \frac{|1 - K(u)|}{u}\, du + \int_\beta^\infty \frac{|K(u)|}{u}\, du \\ &\leq \int_0^\alpha |N(u)| \log \frac{\alpha}{u}\, du + \int_\beta^\infty |N(u)| \log \frac{u}{\beta}\, du \equiv T(\alpha, \beta). \end{aligned} \right. \tag{6}$$

The last-mentioned constant, $T(\alpha, \beta)$, figures also in the following high-indices theorem.

Theorem 2. *If* $\{\lambda_n\}$, $A(u)$ *are defined by* (1), (3) *respectively, and if*

$$\underline{\lim} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = l > 1, \qquad a_n = O(1),$$

and x *is related to* n *so that, as* $n \to \infty$,

$$\overline{\lim} \frac{\lambda_n}{x} = \alpha, \qquad \underline{\lim} \frac{\lambda_{n+1}}{x} = \beta,$$

where α, β *are finite positive constants such that* $\beta \leq \alpha l$[1]), *then* $\Phi_\lambda(x)$ *defined by* (4) *satisfies the inequality*:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n)| \leq \left\{ \int_0^\alpha |N(u)|\, du + \int_\beta^\infty |N(u)|\, du + \frac{T(\alpha, \beta)}{\log l} \right\} \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| \tag{7}$$

where $T(\alpha, \beta)$ *is the constant defined in* (6).

[1]) When $\beta > \alpha l$, we cannot find x related to n as stated, for values of n which bring λ_{n+1}/λ_n arbitrarily close to l.

Proof. We may write

$$\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n) = \int_0^\infty \frac{1}{x} N\left(\frac{u}{x}\right) A(u)\, du - A(\lambda_n)\ ^{2})$$

$$= \int_0^{\lambda_n} \frac{1}{x} N\left(\frac{u}{x}\right) \{A(u) - A(\lambda_n)\}\, du + \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \cdots + \int_{\lambda_{n+1}}^{\infty} \cdots$$

where $A(u) - A(\lambda_n) = 0$ in the second integral on the right. Consequently

$$\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n) = \int_0^{\lambda_n/x} N(u)\, \{A(u\,x) - A(\lambda_n)\}\, du + \int_{\lambda_{n+1}/x}^{\infty} \cdots,$$

$$|\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n)| \leq J_1 + J_2 \tag{8}$$

where

$$J_1 = \int_0^{\lambda_n/x} |N(u)|\, |A(u\,x) - A(\lambda_n)|\, du, \qquad J_2 = \int_{\lambda_{n+1}/x}^{\infty} |N(u)\ |A(u\,x) - A(\lambda_n)|\, du.$$

Now, in J_2, $u\,x \geq \lambda_{n+1}$. If $\lambda_m \leq u\,x < \lambda_{m+1}$, $m \geq n+1$, then

$$|A(u\,x) - A(\lambda_n)| \leq |a_{n+1}| + \sum_{n+2 \leq \nu \leq m} |a_\nu| \leq |a_{n+1}| + (m-n-1) \max_{n+2 \leq \nu \leq m} |a_\nu|.$$

Further, if $\min \lambda_\nu/\lambda_{\nu-1} = \mu$ for $n+2 \leq \nu \leq m$, then

$$u\,x \geq \lambda_m \geq \mu^{m-n-1}\, \lambda_{n+1}, \quad \text{or} \quad m - n - 1 \leq \frac{\log (u\,x/\lambda_{n+1})}{\log \mu}.$$

---

[2]) The justification for writing

(i) $$\Phi_\lambda(x) \equiv \sum_1^\infty a_n K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x} N\left(\frac{u}{x}\right) A(u)\, du$$

is as follows. From the definition of $A(u)$ in (3) we obtain

(ii) $$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\lambda_r} \frac{1}{x} N\left(\frac{u}{x}\right) A(u)\, du = \sum_1^{r-1} A(\lambda_n) \left\{K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right) - K\left(\frac{\lambda_{n+1}}{x}\right)\right\} \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_0^{r-1} a_n K\left(\frac{\lambda_n}{x}\right) - A(\lambda_{r-1})\, K\left(\frac{\lambda_r}{x}\right), \end{cases}$$

while, from the hypotheses $a_n = O(1)$, $\underline{\lim}\ \lambda_n/\lambda_{n-1} > 1$, we get first $a_n = O\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})/\lambda_n\}$ and thence

(iii) $$A(\lambda_{r-1}) \equiv \sum_1^{r-1} a_n = O(\log \lambda_{r-1}), \quad r \to \infty.$$

Now it is known ([2], Lemme 3) that the assumption $N(u) \log u \in L(0, \infty)$ involves $K(u) \log u = o(1)$ as $u \to \infty$. Consequently (iii) gives

(iv) $$A(\lambda_{r-1})\, K\left(\frac{\lambda_r}{x}\right) = O(\log \lambda_r)\, K\left(\frac{\lambda_r}{x}\right) = o(1), \quad r \to \infty.$$

Letting $r \to \infty$ in (ii) and using (iv), we are led at once to (i).

Hence

$$|A(ux)-A(\lambda_n)| \leq |a_{n+1}| + \frac{\log(ux/\lambda_{n+1})}{\log\mu} \max_{n+2\leq\nu\leq m} |a_\nu|$$
$$\leq \left\{1 + \frac{\log(ux/\lambda_{n+1})}{\log\mu}\right\} \max_{n+1\leq\nu\leq m} |a_\nu|.$$

Thus, when u is fixed and n tends to ∞ ensuring $\underline{\lim}\, \lambda_{n+1}/x = \beta$, we get

$$\overline{\lim}\, |A(ux)-A(\lambda_n)| \leq \left\{1 + \frac{\log(u/\beta)}{\log l}\right\} \overline{\lim}\, |a_n|.$$

Therefore, by a special form of a theorem of LEBESGUE for taking limits under integral signs (e.g. [2], Lemme 2), we have

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} J_2 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| \int_\beta^\infty |N(u)| \left\{1 + \frac{\log(u/\beta)}{\log l}\right\} du \quad \left(\beta = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_{n+1}}{x}\right). \tag{9}$$

Similarly

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} J_1 \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n| \int_0^\alpha |N(u)| \left\{1 + \frac{\log(\alpha/u)}{\log l}\right\} du \quad \left(\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_n}{x}\right). \tag{10}$$

The conclusion of Theorem 2 follows at once when we use (9) and (10) in (8).

Remark. *If* $1 < \underline{\lim}\, \lambda_n/\lambda_{n-1} = l < \infty$, *then*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} |\Phi_\lambda(x) - \sum_{\lambda_\nu \leq x} a_\nu| \leq \left\{\int_0^\infty |N(u)|\, du + \frac{T(1,1)}{\log l}\right\} \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|. \tag{7'}$$

For, if $\lambda_n \leq x < \lambda_{n+1}$, then $\sum_{\lambda_\nu \leq x} a_\nu = A(\lambda_n)$ and $\overline{\lim}\, \lambda_n/x \leq 1$, $\underline{\lim}\, \lambda_{n+1}/x \geq 1$, as $x \to \infty$, so that (7') follows from arguments exactly similar to those used to prove (7).

Three corollaries of Theorem 2 are stated below. The first corollary in the case $N(u) = e^{-u}$ is the "high-indices" counterpart of a theorem of T. VIJAYARAGHAVAN ([6], Theorem 1), while the second in the same case contains the analogous counterpart of one of TAUBER's original theorems. The last corollary is an alternative statement of a theorem of N. LEVINSON ([4], p. 191, Theorem LIV).

Corollary 2.1. *If* $\{\lambda_n\}$, $A(u)$, $\Phi_\lambda(x)$ *are defined by* (1), (3), (4) *respectively and if*

$$\underline{\lim} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} > 1, \qquad a_n = O(1),$$

then

$$\Phi_\lambda(x) \to \infty \quad as \quad x \to \infty,$$

implies

$$A(\lambda_n) \to \infty \quad as \quad n \to \infty.$$

Corollary 2.2. *If* $\{\lambda_n\}$, $A(u)$, $\Phi_\lambda(x)$ *are as in* (1), (3), (4) *respectively and if* $\underline{\lim}\, \lambda_n/\lambda_{n-1} = l > 1$, *then either the assumption* $\lim a_n = 0$ *and* $l < \infty$ *or the assumption* $0 < \overline{\lim}\, |a_n| < \infty$ *and* $l = \infty$ *implies that every limit point of* $A(\lambda_n)$

as $n\to\infty$ is a limit point of $\Phi_\lambda(x)$ as $x\to\infty$, the first assumption implying more in fact, viz. that every limit point of $\Phi_\lambda(x)$ is a limit point of $A(\lambda_n)$.

In particular, on either assumption, a unique finite limit point of $\Phi_\lambda(x)$, whenever it exists, is also that of $A(\lambda_n)$.

Corollary 2.2 is obvious from (7′) in the case of the first assumption. In the case of the second assumption it is established by observing that, in (7), we can choose x (e.g. $x=\lambda_n^{\vartheta}\lambda_{n+1}^{1-\vartheta}$ where ϑ is a positive proper fraction) so that $\alpha\to 0$, $\beta\to\infty$ as $l\to\infty$ and so $T(\alpha,\beta)/\log l\leqq T(1,1)/\log l=0$.

LEVINSON ([4], pp. 188—189, Theorem LI) has discussed an interesting sub-class of the class of kernels $N(x)$ satisfying (2), whose Fourier transform

$$k(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty N(x)\,x^{-iu}\,dx, \qquad u \text{ real},$$

is subject to certain restrictions involving $c=2\pi/L$ where we define $L=\min_{n\geq 1}\log(\lambda_{n+1}/\lambda_n)$ on the assumption $\varliminf \lambda_{n+1}/\lambda_n>1$. For this sub-class of $N(x)$, the hypothesis that the series $\Phi_\lambda(x)$ defined by (4) is uniformly convergent for $0<x\leqq X$ implies the conclusion

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|\leqq C_0\,\overline{\lim_{x\to\infty}}\,|\Phi_\lambda(x)| \tag{11}$$

where C_0 is a constant depending only on $N(x)$ and L[3]). Combining (11) with (7) we obtain the next corollary.

Corollary 2.3. *Let $\{\lambda_n\}$ in (1) satisfy the additional condition $\varliminf \lambda_n/\lambda_{n-1}=l>1$. Let $N(x)$ belong to the* LEVINSON *sub-class of the class of kernels satisfying (2). Let $A(u)$ and $\Phi_\lambda(x)$ be defined as in (3) and (4). Then the hypotheses*: (i) *$\Phi_\lambda(x)$ is uniformly convergent for $0<x\leqq X$ (for every X),* (ii) *$\Phi_\lambda(x)=O(1)$ as $x\to\infty$, together imply the conclusion*:

$$\left\{\begin{aligned}&\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|\Phi_\lambda(x)-A(\lambda_n)|\\ &\qquad\leqq\left\{\int_0^\alpha|N(u)|\,du+\int_\beta^\infty|N(u)|\,du+\frac{T(\alpha,\beta)}{\log l}\right\}C_0\,\overline{\lim_{x\to\infty}}\,|\Phi_\lambda(x)|\end{aligned}\right. \tag{12}$$

where x is related to n as in (7) and C_0 is the constant in (11).

(a) *When the hypothesis* (ii) *assumes the special form*

$$\Phi_\lambda(x)=o(1) \qquad [\text{or, } s+o(1)] \quad \text{as} \quad x\to\infty,$$

(12) *becomes*

$$A(\lambda_n)=o(1) \qquad [\text{or, } s+o(1)] \quad \text{as} \quad n\to\infty.$$

[3]) LEVINSON's result is for the interval $(-\infty,\infty)$ which has been converted here into the interval $(0,\infty)$ by changing the variable x. Hence the restrictions on the $k(u)$ defined here are the same as those on LEVINSON's $k(u)$ in [4], p. 189, with the difference that the L defined here is not his L which is given, in terms of his $\{\lambda_n\}$, by $L=\min(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$. In his proof of the result corresponding to (11), LEVINSON actually dispenses with the condition corresponding to $N(x)\log x\in L(0,\infty)$ although he requires this condition for his applications.

(b) *In the special case* $l = \infty$, (12) *shows that all the limit points of* $A(\lambda_n)$ *as* $n \to \infty$ *are limit points of* $\Phi_\lambda(x)$ *as* $x \to \infty$.

The kernels of RIESZ, LAPLACE-ABEL and LAMBERT ([5], p. 413) are familiar examples of $N(u)$ for which all the results of this note, including Corollary 2.3, are valid. The generalized LAMBERT kernel

$$N(u) = -\frac{d}{du}\left(\frac{\alpha u e^{-u}}{1-e^{-\alpha u}}\right), \qquad \alpha > 0,$$

for which Tauberian theorems have been given by IYER [3] is a less familiar example of $N(u)$ to which Theorems 1, 2 and Corollaries 2.1, 2.2 are applicable.

References.

[1] AGNEW, R. P.: Integral transformations and Tauberian constants. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 501—518 (1952). — [2] DELANGE, H.: Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergents (Premier mémoir). Ann. Sci. École. Norm. Sup. (3) **67**, 99—160 (1950). — [3] IYER, V. G.: Tauberian theorems on generalised Lambert's series. J. Indian Math. Soc. (New Series) **1**, 73—87 (1934). — [4] LEVINSON, N.: Gap and density theorems. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **26** (1940). — [5] RAJAGOPAL, C. T.: A generalization of Tauber's theorem and some Tauberian constants. Math. Z. **57**, 405—414 (1953). — [6] VIJAYARAGHAVAN, T.: Converse theorems of summability. J. London Math. Soc. **2**, 215—222 (1927).

Ramanujan Institute of Mathematics, Madras (India).

(Eingegangen am 26. November 1953.)

HERRMANN, O.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 148—155 (1954)

Eine metrische Charakterisierung eines Fundamentalbereichs der Hilbertschen Modulgruppen.

Von
OSKAR HERRMANN.

Für zahlentheoretische Anwendungen ist häufig eine möglichst genaue Kenntnis eines Fundamentalbereichs der HILBERTschen Modulgruppe erforderlich. So wurde z.B. von GÖTZKY [1][1]) der Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe zum quadratischen Zahlkörper $R(\sqrt{5})$ für zahlentheoretische Anwendungen bestimmt. Allgemein hat MAASS [2] einen Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe zu einem beliebigen total-reellen Zahlkörper angegeben[2]). Da die Randhyperflächen des durch MAASS angegebenen Fundamentalbereichs zum Teil durch nur sehr wenig überschaubare transzendente Gleichungen beschrieben werden, dürfte der hier angegebene Fundamentalbereich, der einfachere Randhyperflächen besitzt, Interesse finden. Die Methode, mit welcher hier ein Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe konstruiert wird, läßt sich ohne weiteres auch auf andere Gruppen hyperabelscher Substitutionen übertragen, etwa auf die Gruppen, die vom Verfasser an anderer Stelle [4] als HILBERTsche Modulgruppen zu einer Klasse idealer Zahlen über einem total-reellen algebraischen Zahlkörper bezeichnet wurden.

Die verwendeten Bezeichnungen sind die in der Theorie der HILBERTschen Modulgruppen üblichen: K ist ein fester total-reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n mit der Idealklassenzahl h. $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ seien seine Konjugierten. Jedem dieser Zahlkörper ist eine komplexe Variable $\tau^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ zugeordnet. Wir treffen die Vereinbarung, daß eine Gleichung oder Ungleichung zwischen Größen, die ihrer Natur nach einen Konjugiertenindex tragen müssen, für alle Konjugierten gilt, wenn dieser Konjugiertenindex fehlt. Unter der Spur S bzw. Norm N eines Ausdrucks versteht man die Summe bzw. das Produkt aller Konjugierten dieses Ausdrucks.

Eine HILBERTsche Modulsubstitution ist eine hyperabelsche Substitution

$$(1) \qquad \tau \to \tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta},$$

wobei die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen aus K sind, die der Nebenbedingung, $\varepsilon_0 = \alpha\delta - \beta\gamma$ ist eine total-positive Einheit, genügen. Eine

[1]) Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf S. 155.
[2]) Die diesbezüglichen Untersuchungen bei BLUMENTHAL [3] enthalten einen Irrtum, auf den MAASS [2] aufmerksam machte.

HILBERTsche Modulgruppe Γ ist dann die Gruppe aller HILBERTschen Modulsubstitutionen, deren Determinanten ε_0 einer gewissen Einheitengruppe $\mathfrak{G}$ angehören. Wir können offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\mathfrak{G}$ alle Quadrate von Einheiten enthält. Bekanntlich sind die HILBERTschen Modulgruppen in dem Raum $\mathfrak{T}$, dem Produkt der n Halbebenen $\mathfrak{Im}\,\tau^{(\nu)} > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ eigentlich diskontinuierlich.

In dem Spezialfall, daß die Idealklassenzahl h des Körpers K gleich 1 ist, lassen sich die Methoden und die Resultate der vorliegenden Untersuchungen kurz skizzieren: Es sei $N > 1$ eine natürliche Zahl. Zu dem Punkt $\tau_1(N) = iN$ [3]) gibt es ein Normalpolyeder $\mathfrak{P}(N)$ im Sinne von KLEIN und FRICKE [5] bezüglich der von MAASS [2] angegebenen Metrik. Dieses Normalpolyeder ist ein Fundamentalbereich der HILBERTschen Modulgruppe. Bildet man nun die Vereinigungsmengen $\mathfrak{V}_t = \bigcup_{N=t}^{\infty} \mathfrak{P}(N)$, so ist die abgeschlossene Hülle des Durchschnitts aller $\mathfrak{V}_t$:

$$\mathfrak{P} = \overline{\bigcap_{t=2}^{\infty} \bigcup_{N=t}^{\infty} \mathfrak{P}(N)}$$

wieder ein Fundamentalbereich von Γ. Dieser genügt den Ungleichungen

$$\text{(2)} \qquad \mathsf{N}\,|\gamma\tau + \delta|^2 \geq 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für alle Paare } \gamma, \delta \text{ von teiler-} \\ \text{fremden ganzen Zahlen aus } K; \end{array} \right.$$

$$\text{(3)} \qquad \mathsf{S} \log \varepsilon\,(\log \varepsilon + 2 \log \mathfrak{Im}\,\tau) \geq 0 \qquad \text{für alle Einheiten } \varepsilon \in \mathfrak{G};$$

$$\text{(4)} \qquad \mathsf{S}\,\mu\,(\mu + 2\,\mathfrak{Re}\,\tau) \geq 0 \qquad \text{für alle ganzen Zahlen } \mu \in K.$$

Endlich viele dieser Ungleichungen genügen zur Beschreibung von $\mathfrak{P}$ [4]). Für die rationale Modulgruppe sind die Bereiche $\mathfrak{P}(N)$ sämtlich gleich $\mathfrak{P}$. Man könnte also fragen, ob dies auch allgemein der Fall ist. Diese Frage muß aber verneint werden, wie man durch Verschärfung der hier durchgeführten Abschätzungen zeigen kann.

Falls die Klassenzahl $h > 1$ ist erhält man einen Fundamentalbereich, der aus h Teilen besteht, die von dem durch die Ungleichungen (2), (3), (4) beschriebenen Typus sind.

Die hier dargestellte Methode zur Konstruktion eines Fundamentalbereichs läßt sich auch auf die SIEGELsche Modulgruppe übertragen. Hierauf soll in einer späteren Mitteilung eingegangen werden.

Aus jeder der h Idealklassen des Körpers K wähle man ein ganzes Ideal (α_j', γ_j') $(j = 1, 2, \ldots, h)$ mit minimaler Norm als Repräsentanten. Hierzu gibt es zwei Zahlen β_j', δ_j' mit $\alpha_j'\,\delta_j' - \beta_j'\,\gamma_j' = 1$. Nach einem bekannten Satz über die Lösbarkeit von linearen Kongruenzen in einem algebraischen Zahlkörper können die beiden Zahlen β_j', δ_j' so gewählt werden, daß die Idealgleichungen

$$(\alpha_j', \gamma_j')\,(\beta_j', \delta_j') = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, h)$$

[3]) Es sind also alle Konjugierten von $\tau_1(N)$ gleich.
[4]) Hieraus folgt die endliche Erzeugbarkeit von Γ.

gelten. Das Ideal $(\alpha_j'^{2h}, \gamma_j'^{2h})$ ist Quadrat eines Hauptideals; folglich gibt es eine total-positive Zahl $\omega_j \in K$, so daß $\omega_j = (\alpha_j'^{2h}, \gamma_j'^{2h})$ gilt. Dann sei

$$A_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\alpha_j' & \sqrt[2h]{\omega_j}\,\beta_j' \\ \frac{1}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\gamma_j' & \sqrt[2h]{\omega_j}\,\delta_j' \end{pmatrix},$$

wobei $\sqrt[2h]{\omega_j}$ reell und positiv gewählt sei. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ annehmen.

N sei eine natürliche Zahl. Auf den Punkt

$$\tau_1 = \tau_1(N) = i\,N$$

übe man die h Substitutionen A_j $(j = 1, 2, \ldots, h)$ aus. Hierbei erhält man die h Punkte

$$\tau_j = \tau_j(N) = A_j\,\tau_j(N).$$

Übt man auf diese alle Substitutionen $L \in \Gamma$ aus, so erhält man das Punktsystem $\mathfrak{S}(N)$. Die Menge aller der Punkte $\tau \in \mathfrak{T}$, die keinem Punkt des Systems $\mathfrak{S}(N)$ näher liegen als dem Punkt $\tau_j(N)$, werde mit $\mathfrak{P}_j(N)$ bezeichnet. Die Vereinigungsmenge

$$\mathfrak{P}(N) = \bigcup_{j=1}^{N} \mathfrak{P}_j(N)$$

ist offenbar genau dann ein Fundamentalbereich der Gruppe Γ, wenn aus

$$L\,\tau_j = \tau_k \quad \text{mit} \quad 1 \leq j, k \leq h,\ L \in \Gamma \tag{5}$$

$j = k$ und $L = E$ folgt. Diese Bedingung ist aber sicher dann erfüllt, wenn $N > N_0$ ist, wobei N_0 eine geeignete natürliche Zahl ist. Aus (5) folgt nämlich

$$L_{kj}\,\tau_1 = \tau_1 \quad \text{mit} \quad L_{kj} = A_k^{-1}\,L\,A_j = \begin{pmatrix} \alpha_{kj} & \beta_{kj} \\ \gamma_{kj} & \delta_{kj} \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\mathsf{N}(\gamma_{kj}\,N) \leq 1$$

und

$$\mathsf{N}\left(\sqrt[2h]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\gamma_{kj}\right) \leq C_1\,N^{-n},$$

wobei $C_1 = \underset{1 \leq k \leq h}{\mathrm{Max}}\left(\sqrt[2h]{\omega_k}\right)$ eine nur von K abhängige Schranke ist. Aus $N > \sqrt[n]{C_1}$ folgt $\gamma_{kj} = 0$, da $\sqrt[2h]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\gamma_{kj}$ eine ganze algebraiche Zahl $\in K$ ist. Dann ist aber

$$L\,A_j\,\infty = A_k\,\infty;$$

d.h. $A_k\,\infty$ und $A_j\,\infty$ sind äquivalente parabolische Fixpunkte. Hieraus folgt $k = j$ und es ist ein Leichtes, auch noch $L = E$ zu beweisen. Übrigens ist sofort festzustellen, daß im Falle $h = 1$ die Schranken $N_0 = C_1 = 1$ gewählt werden können.

Um die Bereiche $\mathfrak{P}_j(N)$ für wachsende N untersuchen zu können, gehen wir von der Abstandsformel

$$\mathsf{E}^2(\zeta, iN) = \mathsf{S}\log^2 \frac{\left|1+\frac{\zeta}{iN}\right| + \left|1-\frac{\zeta}{iN}\right|}{1+\frac{\zeta}{iN} - 1 - \frac{\zeta}{iN}}$$

aus. Variiert $\zeta = \xi + i\eta$ in einem kompakten Bereich $\in \mathfrak{T}$, so ist

$$\left|1+\frac{\zeta}{iN}\right| = \left(1+\frac{\eta}{N}\right)\sqrt{1+\frac{\xi^2}{(N+\eta)^2}} = 1+\frac{\eta}{N}+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{N^2}-\frac{1}{2}\frac{\xi^2\eta}{N^3}+O(N^{-4})$$

bzw.

$$\left|1-\frac{\xi}{iN}\right| = 1-\frac{\eta}{N}+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{N^2}-\frac{1}{2}\frac{\xi^2\eta}{N^3}+O(N^{-4}).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\left|1+\frac{\zeta}{iN}\right|+\left|1-\frac{\zeta}{iN}\right|}{1+\frac{\zeta}{iN}-1-\frac{\zeta}{iN}} = \frac{N}{\eta}\,\frac{1+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{N^2}+O(N^{-4})}{1-\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{N^2}-O(N^{-3})} = \frac{N}{\eta}\left(1+\frac{\xi^2}{N^2}\right)(1+O(N^{-3}))$$

und man erhält schließlich

$$\mathsf{E}^2(\zeta, iN) = \mathsf{S}\left(\log N - \log \mathfrak{Im}\,\zeta + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{Re}^2\zeta}{N^2} + O(N^{-3})\right)^2. \tag{6}$$

Für einige Anwendungen kann man (6) abschwächen zu

$$\mathsf{E}^2(\zeta, iN) = \mathsf{S}(\log N - \log \mathfrak{Im}\,\zeta + O(N^{-2}))^2. \tag{7}$$

Der Bereich $\mathfrak{P}_j(N)$ ist durch die folgenden Ungleichungen definiert:

$$\mathsf{E}(\tau, L^{-1}A_k\tau_1) \geqq \mathsf{E}(\tau, \tau_j) \quad \text{für alle} \quad L \in \Gamma \text{ und } k = 1, 2, \ldots, h.$$

Mit diesen sind — wie eine einfache Rechnung zeigt — die folgenden Ungleichungen gleichwertig:

$$\mathsf{E}^2(L_{kj}\zeta_j, iN) - \mathsf{E}^2(\zeta_j, iN) \geqq 0, \tag{8}$$

wobei zur Abkürzung $\zeta_j = \zeta_j(\tau) = A_j^{-1}\tau$ gesetzt wurde. Hier tragen wir (7) ein und erhalten

$$\mathsf{S}\left\{2\log N \log\frac{\mathfrak{Im}\,\zeta_j}{\mathfrak{Im}\,L_{kj}\zeta_j} + \log^2 \mathfrak{Im}\,L_{kj}\zeta_j - \log^2 \mathfrak{Im}\,\zeta_j + O\left(\frac{\log N}{N^2}\right)\right\} \geqq 0. \tag{9}$$

Beachtet man $\mathfrak{Im}\,L_{kj}\zeta_j = \varepsilon\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^{-2}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j$ und $\mathsf{S}\log\varepsilon = 0$, so folgt hieraus bei distributiver Spurbildung

$$2\log N\,\mathsf{S}\log|\gamma_{kj}\zeta_j+\delta_{kj}|^2 + \mathsf{S}\{\log^2 \mathfrak{Im}\,L_{kj}\zeta_j - \log^2 \mathfrak{Im}\,\zeta_j\} + O\left(\frac{\log N}{N^2}\right) \geqq 0. \tag{10}$$

Diese Ungleichung kann man abschwächen zu

$$2\log N\,\mathsf{S}\log|\gamma_{kj}\zeta_j+\delta_{kj}|^2 + O(1) \geqq 0,$$

wofür man auch

$$N\,|\gamma_{kj}\zeta_j+\delta_{kj}|^2 - 1 + O\left(\frac{1}{\log N}\right) \geqq 0 \tag{11}$$

schreiben kann. Ist $\gamma_{kj}=0$, so ist — wie bereits früher festgestellt wurde — $k=j$ und man kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$L_{jj}=\begin{pmatrix}\varepsilon & \mu_j\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{mit } \mu_j \text{ ganz algebraisch und } \left(\sqrt[2h]{\omega_j}\right)^{-2}\mu_j\in K$$

annehmen. Dann ist aber (11) für die weiteren Untersuchungen zu schwach. In diesem Falle folgt aber direkt aus (10):

$$\mathsf{S}\left\{\log^2\varepsilon\,\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j-\log^2\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j+O\left(\frac{\log N}{N^2}\right)\right\}\geqq 0.$$

Hiermit ist gleichwertig:

$$\mathsf{S}\log\varepsilon(\log\varepsilon+2\log\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j)+O\left(\frac{\log N}{N^2}\right)\geqq 0. \tag{12}$$

Im Falle $\varepsilon=1$ ist dieses Resultat wieder zu ungenau. In diesem Fall ist auf die genauere asymptotische Abstandsformel (6) zurückzugreifen. Trägt man diese in (8) ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\mathsf{S}\mu(\mu+2\Re\mathfrak{e}\,\zeta)+O\left(\frac{1}{\log N}\right)\geqq 0. \tag{13}$$

Aus den Ungleichungen (11), (12) und (13) erkennt man, daß der Bereich

$$\mathfrak{P}_j=\overline{\bigcap_{t>N_0}^{\infty}\bigcup_{N=t}^{\infty}\mathfrak{P}_j(N)}$$

den folgenden Ungleichungen genügt:

$$\mathsf{N}\left|\gamma_{kj}\zeta_j+\delta_{kj}\right|\geqq 1, \tag{14}$$

$$\mathsf{S}\log\varepsilon(\log\varepsilon+2\log\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j)\geqq 0 \quad \text{mit } \zeta_j=A_j^{-1}\tau, \tag{15}$$

$$\mathsf{S}\mu_j(\mu_j+2\Re\mathfrak{e}\,\zeta_j)\geqq 0. \tag{16}$$

In Ungleichung (14) durchläuft k bei festem j die Zahlen $1, 2, \ldots, h$ und bei festem k durchläuft das Paar γ_{kj}, δ_{kj} alle Paare teilerfremder ganzer algebraischer Zahlen, die den Nebenbedingungen $\sqrt[2h]{\omega_k\,\omega_j}\,\gamma_{kj}$, $\sqrt[2h]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\delta_{kj}\in K$ genügen. In Ungleichung (15) durchläuft ε alle total-positiven Einheiten aus $\mathfrak{G}$ und in (16) durchläuft μ_j alle ganzen algebraischen Zahlen, die der Nebenbedingung $\frac{1}{\left(\sqrt[2h]{\omega_j}\right)^2}\mu_j\in K$ genügen.

Es ist nun noch zu zeigen, daß jede der genannten Ungleichungen tatsächlich auf die beschriebene Weise erhalten wird. Sei z.B. γ_{kj}, δ_{kj} ein Paar von algebraischen Zahlen, das den Nebenbedingungen von Ungleichung (14) genügt. Dann setze man $\gamma'_{kj}=\sqrt[2h]{\omega_k}\sqrt[2h]{\omega_j}\,\gamma_{kj}$, $\delta'_{kj}=\frac{\sqrt[2h]{\omega_k}}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\,\delta_{kj}$; hierzu gibt es algebraische Zahlen $\alpha'_{kj}, \beta'_{kj}\in K$, so daß $\alpha'_{kj}\,\delta'_{kj}-\beta'_{kj}\,\gamma'_{kj}=1$ ist und die Idealgleichung $(\alpha'_{kj}, \beta'_{kj})\,(\gamma'_{kj}, \delta'_{kj})=(1)$ gilt. Setzt man nun $\alpha_{kj}=\frac{\sqrt[2h]{\omega_k}}{\sqrt[2h]{\omega_j}}\,\alpha'_{kj}$, $\beta_{kj}=$

$\sqrt[2k]{\omega_k}\sqrt[2k]{\omega_j}\beta'_{kj}$ und $L_{kj}=\begin{pmatrix}\alpha_{kj} & \beta_{kj}\\ \gamma_{kj} & \delta_{kj}\end{pmatrix}$, so ist $L=A_k L_{kj} A_j^{-1}\in\Gamma$. Damit ist gezeigt, daß der Bereich $\mathfrak{P}_j$ allen Ungleichungen (14) genügt. In den beiden anderen Fällen schließt man entsprechend.

Ehe wir zeigen, daß $\mathfrak{P}=\bigcup_{j=1}^{k}\mathfrak{P}_j$ einen Fundamentalbereich der Hilbertschen Modulgruppe darstellt, untersuchen wir die Bereiche $\mathfrak{P}_j$ näher. Die Ungleichungen (16) beschreiben ein Normalpolyeder der Translationsgruppe

$$\xi_j=\Re\mathfrak{e}\,\zeta_j\to\xi_j+\mu_j$$

im euklidischen $\Re^n$. Ebenso beschreiben die Ungleichungen (15) ein Normalpolyeder der Translationsgruppe

$$l_j=\log\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j\to l_j+\log\varepsilon.$$

Damit ist evident, daß endlich viele der Ungleichungen (15) und (16) zusammen mit den Ungleichungen (14) bereits zur Kennzeichnung von $\mathfrak{P}_j$ ausreichen. Die genaue Anzahl der Ungleichungen (16), die zur Kennzeichnung von $\mathfrak{P}_j$ erforderlich sind, hängt vom Körper K ab und ist mindestens $2n$, aber höchstens $2^{n+1}-2$, wie ohne Beweis angemerkt sei. Die entsprechenden Ungleichungen für die Anzahl der Ungleichungen (15) erhält man hieraus durch Ersetzen von n durch $n-1$.

In $\mathfrak{P}_j$ gilt

$$\mathsf{N}\,\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j\geq C_2 \tag{17}$$

mit einer gewissen Zahl C_2, die nur von K abhängt. In der Tat: Die Ungleichungen

$$|\gamma\sqrt[2k]{\omega_j}\,\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j|<\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{C_1}}$$

$$\left|\gamma'\sqrt[2k]{\omega_j}\,\Re\mathfrak{e}\,\zeta_j+\frac{1}{\sqrt[2k]{\omega_j}}\delta'\right|<\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt[n]{C_1}}$$

sind mit Zahlen $\gamma',\delta'\in K$, die der Nebenbedingung $\frac{1}{\sqrt{\omega_j}}\Big/\gamma,\ \sqrt{\omega_j}/\delta$ genügen, nicht-trivial lösbar[5]), wenn nur $\mathsf{N}\,\Im\mathfrak{m}\,\zeta_j<C_2$ gilt, wobei C_2 eine gewisse nur von K abhängige Schranke ist. Dann ist

$$\mathsf{N}\left|\gamma'\sqrt[2k]{\omega_j}\,\zeta_j+\frac{1}{\sqrt[2k]{\omega_j}}\delta'\right|^2<\frac{1}{C_1^2}$$

und für alle k gilt auch

$$\mathsf{N}\left|\sqrt[2k]{\omega_j\,\omega_k}\,\gamma'\,\zeta_j+\sqrt[2k]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\delta'\right|^2<1.$$

[5]) Man stelle γ' und δ' durch Linearkombinationen einer Basis der durch die Nebenbedingungen charakterisierten Ideale mit unbestimmten Koeffizienten dar und wende den bekannten Satz von Minkowski über Systeme linearer Ungleichungen an.

Für genau ein k besitzt das Paar ganzer algebraischer Zahlen $\sqrt[2h]{\omega_j \omega_k}\,\gamma'$, $\sqrt[2h]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\gamma'$ einen größten gemeinsamen Teiler $\vartheta \in K$. Für dieses k setze man $\gamma_{kj} = \sqrt[2h]{\omega_j \omega_k}\,\frac{\gamma'}{\vartheta}$, $\delta_{kj} = \sqrt[2h]{\frac{\omega_k}{\omega_j}}\,\frac{\delta'}{\vartheta}$ und es gilt

$$\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 < 1$$

d.h. ζ genügt einer der Ungleichungen (14) nicht, womit die Behauptung bewiesen ist.

Der durch die Ungleichungen (15), (16) und (17) dargestellte Bereich wird nur durch endlich viele der Hyperflächen

$$\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 = 1 \tag{18}$$

geschnitten. Ist nämlich $|\mathsf{N}\,\gamma_{kj}| > C_2^{-1}$, so ist sicher $\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 \geqq \mathsf{N}\,(\gamma_{kj}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j)^2 > 1$. Da man außerdem

$$\mathsf{S}\log|\varepsilon|\,\log|\varepsilon\,\gamma_{ki}^2| \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad \varepsilon \in K$$

annehmen darf, kommen in (18) nur endlich viele γ_{kj} in Frage. Wegen

$$\begin{aligned}\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 &= \mathsf{N}\,\{(\gamma_{kj}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j)^2 + (\gamma_{kj}\,\mathfrak{Re}\,\zeta_j + \delta_j)^2\}\\ &\geqq N\,(\gamma_{kj}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j)^2\,\mathsf{S}\,\frac{|\gamma_{kj}\,\mathfrak{Re}\,\zeta_j + \delta_{kj}|^2}{|\gamma_{kj}\,\mathfrak{Im}\,\zeta_j|^2}\end{aligned}$$

braucht man bei festem γ_{kj} auch nur endlich viele δ_{kj} zu beachten. Daraus folgt, daß $\mathfrak{P}_j$ durch nur endlich viele der Gln. (14), (15) und (16) beschrieben wird.

Ist $\tau \in \mathfrak{P}_j^*$, $\tau' \in \mathfrak{P}_k^*$ und $\tau' = L\,\tau$ mit $L \in \Gamma$, so folgt im Falle $\gamma_{kj} \neq 0$ $\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 \geqq 1$, also $\mathsf{N}\,\eta_j \geqq \mathsf{N}\,\eta_k'$. Aus Symmetriegründen ist dann $\mathsf{N}\,\eta_j = \mathsf{N}\,\eta_k'$, also $\mathsf{N}\,|\gamma_{kj}\zeta_j + \delta_{kj}|^2 = 1$. Im Falle $\gamma_{kj} = 0$ schließt man analog und findet, daß innere Punkte von $\mathfrak{P}_j^*$ und $\mathfrak{P}_k^*$ nicht äquivalent sind.

Sei τ vorgegeben, zu jedem $N > N_0$ gibt es dann ein L_N und ein j_N, so daß

$$\tau_N = L_N\,\tau \in \mathfrak{P}_{j_N}$$

ist. Nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge kann man j_N als von N unabhängig ansehen. Nun ist

$$\mathsf{N}\,\mathfrak{Im}\,A_j^{-1}\,L\,\tau = \mathsf{N}\,\mathfrak{Im}\,L_{jj}\zeta_j \leqq C_3$$

mit einer von τ abhängigen Schranke C_3. Es gibt einen kompakten Bereich $\mathfrak{B}$, der den Durchschnitt von $\mathfrak{P}_j$ mit dem durch $\mathsf{N}\,\mathfrak{Im}\,\tau \leqq C_3$ definierten Bereich $\mathfrak{B}_0$ ganz im Innern enthält. Dieser Bereich $\mathfrak{B}$ enthält auch den Durchschnitt von $\mathfrak{P}_j(N)$ mit $\mathfrak{B}_0$ für fast alle N. Beim Beweis ersetze man die Ungleichungen (11), (12), (13) durch ein solches endliches Teilsystem, daß durch den Grenzübergang $N \to \infty$ gerade die endlich vielen Ungleichungen, die zur Kennzeichnung des Bereiches $\mathfrak{P}_j$ ausreichen, erhalten werden. Hierbei wird $\mathfrak{P}_j(N)$ durch einen umfassenderen Bereich ersetzt, für den die Behauptung

noch gilt, und man hat erreicht, daß die Restglieder der Ungleichungen (11), (12) und (13) gleichmäßig abgeschätzt werden können. Die oben bestimmte Teilfolge der τ_N hat dann mindestens einen Häufungspunkt in $\mathfrak{B}$. Wir dürfen annehmen, daß τ_N gegen τ_0 konvergiert. Da die Hilbertsche Modulgruppe in $\mathfrak{T}$ eigentlich diskontinuierlich ist, ist jede konvergente Folge von äquivalenten Punkten von einer gewissen Stelle an konstant. Ferner kann man annehmen, daß auch L_N von einer gewissen Stelle an konstant und gleich L ist — andernfalls gehe man nochmals zu einer Teilfolge über. Der Punkt τ_0 ist dann zu τ äquivalent und offenbar in $\mathfrak{P}_j$ enthalten. Damit ist gezeigt, daß es zu jedem Punkt $\tau \in \mathfrak{T}$ einen äquivalente Punnkt in $L\,\tau \in \mathfrak{P}$ gibt. Hieraus folgt $\mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}_j^*$ und $\mathfrak{P} = \bigcup \mathfrak{P}_j$ ist ein Fundamentalbereich der Hilbertschen Modulgruppe.

Literatur.

[1] Götzky, Fr.: Über eine zahlentheoretische Anwendung von Modulfunktionen zweier Veränderlicher. Math. Ann. **100**, 411—437 (1928). — [2] Maass, H.: Über Gruppen hyperabelscher Substitutionen. Sitzgsber. Heidelb. Akad. Wiss. **1940**, 2. Abh. (1940). — [3] Blumenthal, O.: Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen. (Erste Hälfte.) Math. Ann. **56**, 509—548 (1903). — [4] Herrmann, O.: Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. Math. Ann. **127**, 357—400 (1954). — [5] Fricke, R., u. F. Klein: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I: Die Gruppentheoretischen Grundlagen. Leipzig 1897.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 2. Dezember 1953.)

André, J.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 156—186 (1954)

Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe.

Von
Johannes André.

Einleitung.

1. Eine abstrakte projektive Ebene wird bekanntlich genau dann zu einem projektiven zweidimensionalen Raum über einem Schiefkörper, wenn in ihr der Schließungssatz von Desargues ausnahmslos gültig ist. Über projektive Ebenen, in denen dieser Schließungssatz nicht gefordert wird, ist jedoch nur sehr wenig bekannt. Es gibt keine allgemeine Klassifikation solcher „nicht-Desarguesscher Ebenen".

Man kann bis jetzt befriedigende Strukturaussagen nur über projektive Ebenen machen, in denen noch zusätzliche Eigenschaften (neben dem Axiomensystem der projektiven Ebene) gefordert werden. Dies kann etwa dadurch geschehen, daß man die Gültigkeit von Schließungssätzen annimmt, die schwächer sind als der des Desargues. Den ersten Schritt in dieser Richtung tat R. Moufang in [*13*]. Sie forderte den „Satz vom vollständigen Vierseit", der im wesentlichen äquivalent ist mit der Gültigkeit der kleinen Desarguesschen Konfiguration bezüglich jeder Geraden. Diese besagt: Gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte zweier Dreiecke durch einen Punkt — das Zentrum —, und geht die Verbindungsgerade der Schnitte zweier entsprechender Dreiecksseiten — die Achse — durch dieses Zentrum, so liegt der Schnittpunkt des dritten Paares entsprechender Dreiecksseiten auf dieser Achse[1]).

Moufang zeigte in [*13*], daß genau die Ebenen über einem *Alternativkörper* diese Eigenschaft haben.

Marshall Hall verallgemeinerte in [*8*] die Ergebnisse von Moufang. Er setzte den kleinen Schließungssatz von Desargues lediglich bezüglich *einer* Geraden voraus (die dann zweckmäßig als *uneigentlich* angenommen wird). Hall kennzeichnete in [*8*], Thm. 6.3 diese Ebenen als solche, zu denen ein Koordinatensystem angegeben werden kann, dessen Koordinaten einem *Quasikörper*[2]) angehören. Ein Quasikörper (Definition 10) ist dabei eine algebraische Struktur, in der alle Schiefkörperaxiome mit Ausnahme des Assoziativgesetzes der Multiplikation und des rechtsseitigen Distributivgesetzes gelten. Die oben erwähnten Alternativkörper sind spezielle Quasikörper.

[1]) Vgl. auch [*8*], S. 264, Thm. L. Diese Bedingung L ist gerade die des kleinen Desarguesschen Satzes. Dort bedeuten A das Zentrum, die Gerade AB (die beliebig liegen darf) die Achse und die entsprechenden Dreiecke sind die Dreiecke RST und XYZ. Die etwas andere Formulierung des Thm. L. ist mit unserer gleichbedeutend.

[2]) In [*8*] „Veblen-Wedderburn-System" genannt.

2. Man kann auch andere Annahmen statt solcher über die Gültigkeit gewisser Schließungssätze machen. So führte R. BAER gruppentheoretische Annahmen ein. Er forderte die Transitivität gewisser Untergruppen der Gruppe aller Kollineationen der Ebene. Unter anderem zeigte er in [3] (Thm. 6.2), daß der kleine DESARGUESsche Schließungssatz bezüglich der uneigentlichen Geraden genau dann gilt, wenn die Translationsgruppe transitiv in den eigentlichen Punkten der Ebene ist (Satz 4 dieser Arbeit).

3. Die weitere Untersuchung dieser „Ebenen mit transitiver Translationsgruppe" — im folgenden *Translationsebenen* genannt (Definition 6) — ist der Inhalt dieser Abhandlung. Durch die oben genannten Untersuchungen von BAER und HALL ist zwar manches über diese Ebenen bekannt geworden. Es sind aber noch viele Fragen offen. So ist noch keine vollständige Klassifikation durchgeführt, nicht einmal für die Translationsebenen mit nur endlich vielen Punkten und Geraden. Denn zunächst weiß man noch wenig über die Struktur der Quasikörper: Nur die endlichen Quasikörper mit dem Assoziativgesetz für die Multiplikation (in [19]) und die Alternativkörper (in [7] und [11]) sind bis jetzt vollständig klassifiziert.

Außerdem tritt aber hier noch eine Erscheinung auf, die bei Ebenen über Schiefkörpern nicht vorkommt: Es kommt vor, daß zwei nichtisomorphe Quasikörper isomorphe Translationsebenen erzeugen[3]).

In dieser Arbeit wird ein anderer Weg eingeschlagen, die Translationsebenen zu kennzeichnen. Diese Charakterisierung geschieht durch eine spezielle Art der von J. W. YOUNG in [18] eingeführten Gruppenpartitionen, den sog. *Kongruenzen*. Diese sind im wesentlichen Überdeckungen eines projektiven Raumes durch eine Menge paarweise fremder linearer Unterräume, von denen je zwei verschiedene den Gesamtraum aufspannen.

4. Der erste Paragraph ist vorbereitender Natur. Er stellt im wesentlichen schon bekannte Dinge über Ebenen und Kollineationen zusammen. In § 2 werden die Begriffe „Partition" und „Kongruenz" einer Gruppe eingeführt (Definitionen 7 und 8). Eine Überdeckung einer Gruppe („Trägergruppe") durch Untergruppen heißt *Partition*, wenn je zwei verschiedene dieser Untergruppen nur das neutrale Element 0 gemeinsam haben (die Verknüpfung dieser Gruppe wird im folgenden stets additiv geschrieben). Eine Partition wird *Kongruenz* genannt, wenn sich außerdem die Gruppe als Summe irgend zweier voneinander verschiedener Untergruppen dieser Überdeckungsmenge darstellen läßt. Das ist eine sehr wesentliche Einschränkung, denn aus ihr folgt unter anderem, daß eine Gruppe mit einer Kongruenz abelsch ist und daß die Untergruppen der Kongruenz (ihre *Komponenten*) alle einander isomorph sind (Sätze 7 und 8). Deutet man die Elemente einer Gruppe mit Kongruenz als Punkte und die Restklassen der Untergruppen dieser Kongruenz als Geraden, so ergibt sich auf diese Weise eine (affine) Translationsebene, deren Translationsgruppe isomorph ist zur Gruppe, von der ausgegangen wurde.

[3]) Vgl. etwa [8] Thm. 5.8, insbesondere (5.5).

In § 3 wird gezeigt, daß sich umgekehrt jede Translationsebene auf die eben beschriebene Art darstellen läßt. Die Trägergruppe der zu konstruierenden Kongruenz ist dabei isomorph zur Translationsgruppe der Ebene. Genau jede Untergruppe U (dieser Translationsgruppe) mit der folgenden Beschaffenheit gehört zur Kongruenz: U besteht aus denjenigen Translationen, die eine feste Gerade (und damit alle zu ihr parallelen) in sich überführen. Wir erhalten so eine eineindeutige Abbildung zwischen den Kongruenzen einerseits und den Translationsebenen andererseits (Satz 9).

5. Nachdem nunmehr diese grundlegende Beziehung hergestellt ist, gelingt es leicht, weitere Eigenschaften der Translationsebenen herzuleiten. So wird in § 4 der *Kern* einer Kongruenz oder Translationsebene eingeführt. Man versteht darunter die Menge derjenigen Endomorphismen der zur Kongruenz gehörenden Trägergruppe, welche die Kongruenz *komponentenweise* in sich überführen. Ein solcher Endomorphismus bildet entweder die ganze Gruppe auf 0 ab (ist also der Nullendomorphismus) oder ist ein Automorphismus der Trägergruppe (Satz 10). Da die Trägergruppe abelsch ist, bilden alle diese Endomorphismen einen Ring, also nach dem eben bemerkten sogar einen Schiefkörper. Als solcher läßt sich also der Kern einer Translationsebene ansehen. Die multiplikative Gruppe des Kernes ist isomorph zur Gruppe aller derjenigen Kollineationen der (affinen) Ebene, die den „Nullpunkt" 0 (der zugehörigen Trägergruppe) festlassen und jede Gerade in eine dazu parallele überführen (das sind die *Streckungen* mit dem Fixpunkt 0). Die Trägergruppe läßt sich auffassen als Modul über dem Kern als Operatorenbereich. Die Ebene ist genau dann DESARGUESsch, wenn dieser Modul über dem Kern den Rang 2 hat. In diesem Fall ist der Kern der Koordinatenschiefkörper der Ebene.

6. In § 5 und § 6 werden die Translationsebenen mit den in Ziffer 1 erwähnten Quasikörpern in Zusammenhang gebracht. Der Kern eines Quasikörpers (Definition 11) wird eingeführt als — grob gesagt — die Menge derjenigen Quasikörperelemente, die sich gegenüber allen Elementen wie die Elemente eines Schiefkörpers verhalten. Der Begriff des Kernes ist in Analogie zu dem des Zentrums — etwa einer Gruppe — gebildet worden. Der Kern eines Quasikörpers Q ist isomorph zu dem (im vorigen Absatz erläuterten) Kern der zu Q gehörenden Translationsebene (Zusatz zu Satz 16). Jeder Quasikörper läßt sich auffassen als ein Modul mit seinem Kern als Operatorenbereich. Es wird gezeigt (Zusatz zu Satz 17), daß dieser Modul nur von der zu diesem Quasikörper gehörenden Ebene abhängt.

7. Der § 7 bringt Untersuchungen über die Kollineationsgruppe einer Translationsebene. Zunächst wird gezeigt, daß bei den „meisten" Translationsebenen die uneigentliche Gerade bei *jeder* Kollineation festbleibt, daß also jede Kollineation affin ist. Bei von 2 verschiedener Charakteristik erfüllen nur die von MOUFANG in [*13*] untersuchten Ebenen diese Bedingung *nicht*[4]).

[4]) Natürlich gilt diese Bedingung auch nicht bei DESARGUESschen Ebenen, die ja spezielle MOUFANG-Ebenen sind.

Es genügt also in den „meisten" Fällen, sich auf die affinen Kollineationen zu beschränken. Jede affine Kollineation ist eindeutig darstellbar durch ein Produkt aus einer affinen Kollineation, die den Nullpunkt festläßt (eine sog. *homogene* Kollineation), und einer Translation. Eine homogene (affine) Kollineation wird induziert durch eine (bezüglich des Kernes) semilineare nichtsinguläre Transformation, welche die zur Ebene gehörende Kongruenz (als Ganzes) in sich überführt, und umgekehrt (Satz 19). Eine *projektive* Kollineation — das ist eine solche, die sich als Produkt von affinen Perspektivitäten darstellen läßt — wird sogar durch eine *lineare* Transformation induziert, wenn der Kern kommutativ ist. Während aber bei Desarguesschen Ebenen auch die Umkehrung hiervon gilt, braucht dies bei nicht-Desarguesschen Translationsebenen nicht mehr der Fall zu sein.

8. Eine Kongruenz, deren Trägergruppe über ihrem Kern *endlichen* Rang hat, läßt sich — wie im letzten Paragraphen ausgeführt wird — *geometrisch* deuten. Im einfachsten nichttrivialen Fall ist eine Kongruenz in einem projektiven dreidimensionalen Raum darstellbar als Menge paarweise windschiefer Geraden, die diesen Raum überdeckt. Ein Beispiel einer solchen Kongruenz ist die *elliptische Geradenkongruenz* des reellen dreidimensionalen projektiven Raumes, die aus allen reellen Treffgeraden zweier konjugiert-komplexer windschiefer Geraden besteht. Zu dieser Kongruenz gehört allerdings eine Desarguessche Ebene, nämlich die Ebene über dem komplexen Zahlkörper[5]). Man kann aber hieraus leicht weitere Kongruenzen gewinnen. Die elliptische Geradenkongruenz läßt sich nämlich auch als eine Menge von Regelscharen einer Menge paarweise fremder einschaliger Hyperboloide — zusammen mit zwei weiteren Geraden — auffassen. Geht man in einigen dieser Hyperboloide zu den konjugierten Regelscharen über, läßt aber die übrigen Geraden der Kongruenz ungeändert, so erhält man neue Kongruenzen, die zu nicht-Desarguesschen Ebenen gehören.

Den Herren R. Baer und G. Pickert bin ich für wertvolle Anregungen zu großem Dank verpflichtet.

§ 1. Kollineationsgruppen.

1. Definition 1. Unter einer *projektiven Ebene* Π verstehen wir eine Menge (deren Elemente „Punkte" genannt werden), in der gewisse Teilmengen, genannt „Geraden", ausgezeichnet sind. Bezüglich dieser Geraden sollen die folgenden Axiome gelten:

P1. *Zu zwei verschiedenen Punkten p und q gibt es genau eine Gerade, die beide Punkte enthält* (genannt die *Verbindungsgerade* $\langle p\,q\rangle$ von p mit q).

P2. *Zu zwei verschiedenen Geraden G und H gibt es genau einen Punkt, der in beiden Geraden enthalten ist* (genannt der *Schnittpunkt* $G \cap H$ von G mit H).

P3. *Es gibt vier Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen* (d.h. es gibt ein „nichtausgeartetes Viereck").

[5]) Dieser Fall ist schon von S. Lie für seine Begründung der Kugelgeometrie untersucht worden. Vgl. dazu etwa [17].

2. Läßt man in einer projektiven Ebene eine Gerade U (die man uneigentlich nennen kann) und die auf ihr liegenden Punkte fort, so kommt man zwangsläufig zu dem Begriff der „affinen Ebene“:

Definition 1a. Eine *affine Ebene* ist eine Menge von „Punkten“, in denen Untermengen, genannt „Geraden“, ausgezeichnet sind. Zwei Geraden G und H sollen „parallel“ heißen (G parallel zu H, in Zeichen $G \| H$), wenn $G = H$ oder $G \cap H = \varnothing$ [6]). Ferner sollen die folgenden Axiome gelten:

A1. *Zu zwei verschiedenen Punkten existiert genau eine Verbindungsgerade.*

A2. *Zu einem Punkt p und einer Geraden G gibt es genau eine Gerade H durch p, die zu G parallel ist.*

A3. *Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.*

Aus diesen Axiomen folgt leicht, daß „parallel“ eine Äquivalenzrelation ist, ferner, daß zwei nichtparallele Geraden genau einen Schnittpunkt haben und daß jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält.

Die Axiome P3 und A3 sind „Reichhaltigkeitsaxiome“, die Entartungsfälle ausschließen, wie etwa den, daß die Geometrie nur aus einer Geraden besteht. HALL hat in [8] alle diese „ausgearteten Ebenen“ angegeben.

Durch Entfernen einer Geraden und der auf ihr liegenden Punkte erhält man aus einer projektiven Ebene eine affine Ebene. Umgekehrt erhält man so alle affinen Ebenen. In einer gegebenen affinen Ebene kann man nämlich in bekannter Weise jeder Schar paralleler Geraden einen „uneigentlichen Punkt“ als gemeinsamen Schnittpunkt dieser Geraden zuordnen. Die Menge dieser uneigentlichen Punkte wird dann zur uneigentlichen Geraden [7]).

3. Definition 2. Eine *Kollineation* einer projektiven Ebene Π ist eine eineindeutige Abbildung der Punkte von Π auf sich, die auch die Menge der Geraden von Π eineindeutig auf sich abbildet. Die Kollineationen bilden (mit der üblichen Hintereinanderausführung von Abbildungen als Multiplikation) eine Gruppe $\mathfrak{C}$.

Definition 3. Eine Kollineation, die mindestens eine Gerade U (die wir später im allgemeinen als uneigentlich annehmen werden) *punktweise* festläßt, heißt eine *Perspektivität*. Eine nichtidentische Perspektivität π hat offenbar nur eine Gerade U mit der eben beschriebenen Eigenschaft; U heißt die *Achse* von π (vgl. auch [3]). Die Untergruppe aller Perspektivitäten mit fester Achse U (zusammen mit der Identität) werde mit $\mathfrak{P}_U$ oder auch kurz mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet.

BAER zeigte in [3] (Corollary 2.3), daß es zu jeder nichtidentischen Perspektivität π genau einen Punkt p gibt, derart, daß π jede Gerade durch p in sich überführt: $p \in H \rightarrow \pi H = H$. p heißt das *Zentrum* der Perspektivität π.

Alle Perspektivitäten mit fester Achse U und festem Zentrum p bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_U$. Ebenso bilden nach [3] Corollary 2.4 alle diejenigen

[6]) Mit $\varnothing$ wird die leere Menge bezeichnet.

[7]) Zum Beweis dieses und des weiter oben angegebenen Sachverhaltes s. etwa [6], S. 110. Die projektive (affine) Ebene nennt BIRKHOFF dort plane projective (affine) geometry.

Perspektivitäten mit fester Achse U, deren Zentren alle auf einer festen Geraden (die mit U zusammenfallen kann oder nicht) liegen, eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_U$.

Definition 4. Eine Perspektivität, deren Zentrum auf ihrer Achse U liegt, heißt eine *Translation* (bezüglich U). Nach dem eben Bemerkten bilden die Translationen eine Untergruppe von $\mathfrak{P}_U$, die mit $\mathfrak{T}_U$ oder, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, einfach mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet wird.

Eine nichtidentische Translation hat außerhalb U keinen Fixpunkt.

Wäre nämlich $p \notin U$ ein Fixpunkt der nichtidentischen Translation τ, so würden auch alle Geraden durch p ungeändert bleiben, weil τ alle Punkte von U festläßt. p wäre also Zentrum von τ. τ hat aber als Translation auch ein Zentrum auf U, hätte also dann zwei verschiedene Zentren, was nach dem oben zitierten Satz von BAER nicht geht. Hieraus und aus der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{T}$ folgt, daß es zu je zwei Punkten p und q höchstens *eine* Translation gibt, die p in q überführt.

$\mathfrak{T}$ ist Normalteiler in $\mathfrak{P}$, denn hätte $\pi\,\tau\,\pi^{-1}$ ($\underline{1} \neq \tau \in \mathfrak{T}$; $\pi \in \mathfrak{P}_U$) ein Zentrum $p \notin U$, so hätte τ das Zentrum $\pi^{-1}\,p \notin U$ [8]).

Definition 4a. Eine Perspektivität, deren Zentrum p *nicht* auf ihrer Achse U liegt, heißt eine *Streckung* (bezüglich U) mit dem Fixpunkt p oder kurz eine *p-Streckung*.

Alle p-Streckungen bilden eine Untergruppe $\mathfrak{S}_p$ von $\mathfrak{P}$. Nach den Sätzen von BAER folgt nun sofort, daß zwei verschiedene Streckungsgruppen $\mathfrak{S}_p$ und $\mathfrak{S}_q$ ($p \neq q$) nur die Identität gemeinsam haben, ebenso jedes $\mathfrak{S}_p$ mit $\mathfrak{T}$. Ferner folgt, daß jede Perspektivität eine Streckung oder eine Translation ist.

Später benötigen wir den folgenden wichtigen Satz, dessen Beweis etwa in [*12*] zu finden ist [9]).

Satz 1. *Existieren in der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ zwei (nichtidentische) Translationen mit verschiedenen Zentren (d.h. verschiedenen „Richtungen"), so ist $\mathfrak{T}$ abelsch.*

4. Definition 5. Eine Kollineation, die eine feste Gerade U *als Ganzes* in sich überführt, heißt eine *affine Kollineation* oder *Affinität* (bezüglich U).

Die Affinitäten bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{C}$, die mit $\mathfrak{A}_U$ oder kurz $\mathfrak{A}$ bezeichnet wird. Jede Affinität α der projektiven Ebene Π induziert in der affinen Ebene $\Pi - U = \mathsf{A}$ eine eineindeutige Abbildung $\bar{\alpha}$ ihrer Punkte auf sich, die Geraden von A wieder in solche überführt. Umgekehrt läßt sich eine Abbildung mit diesen Eigenschaften stets zu einer Affinität von Π erweitern. Durch $\bar{\alpha}$ werden nämlich parallele Geraden und nur solche wieder in parallele übergeführt; dadurch wird offenbar eine eineindeutige Abbildung der Punkte von U auf sich gegeben. Die so erhaltene Abbildung aller Punkte von Π auf sich ist gerade die Kollineation α, von der ausgegangen wurde. Wir können und wollen also im folgenden $\bar{\alpha}$ mit α identifizieren [10]).

[8]) $\underline{1}$ bedeutet, wie üblich, die identische Abbildung.

[9]) Vgl. auch [*1*] Thm. 5 und 6 und [*14*].

[10]) Häufig wird deshalb später eine affine Kollineation auch kurz als „Kollineation" (der betrachteten affinen Ebene) bezeichnet, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

$\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{T}$ sind Untergruppen von $\mathfrak{A}$. Sie sind aber sogar Normalteiler in $\mathfrak{A}$. Aus $\pi \in \mathfrak{P}$ und $\alpha \in \mathfrak{A}$ folgt nämlich für jedes $u \in U$, daß $\alpha \pi \alpha^{-1} u = u$, d.h. $\alpha \pi \alpha^{-1} \in \mathfrak{P}$. Ist π sogar in $\mathfrak{T}$, so hat $\alpha \pi \alpha^{-1}$ außerhalb U keinen Fixpunkt, was entsprechend wie in Ziffer 3 bewiesen wird. Also ist dann auch $\alpha \pi \alpha^{-1} \in \mathfrak{T}$.

5. Definition 6. Eine projektive Ebene Π heißt *Translationsebene*, wenn es in ihr eine Gerade U gibt, derart, daß die zu U gehörende Translationsgruppe $\mathfrak{T}_U$ transitiv in den Punkten von Π außerhalb U ist.

Eine affine Ebene heißt Translationsebene, wenn die Translationsgruppe bezüglich ihrer uneigentlichen Geraden transitiv in den eigentlichen Punkten ist.

Satz 2. *In einer Translationsebene ist jeder Punkt der ausgezeichneten (uneigentlichen) Geraden U Zentrum einer Translation.*

Sei nämlich $u \in U$ und p und q verschiedene Punkte außerhalb U, derart, daß ihre Verbindungsgerade $\langle p\, q \rangle$ die Gerade U in u trifft. Wegen der Transitivität gibt es ein $\tau \in \mathfrak{T}$, so daß $q = \tau\, p$. Ein von u verschiedener Punkt $v \in U$ ist nicht Zentrum von τ wegen $\langle p\, v \rangle \neq \langle q\, v \rangle = \langle \tau\, p, v \rangle = \tau \langle p\, v \rangle$. Also bleibt nur u als Zentrum von τ übrig.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt sofort der

Satz 3. *Die Translationsgruppe einer Translationsebene ist abelsch.*

Wegen $\mathfrak{S}_{\tau p} = \tau\, \mathfrak{S}_p\, \tau^{-1} \cong \mathfrak{S}_p$ $(\tau \in \mathfrak{T})$ ist bei Translationsebenen die Streckungsgruppe $\mathfrak{S}_p$ (bis auf Isomorphie) unabhängig von der speziellen Wahl des Fixpunktes p, so daß man in diesem Falle von *der* Streckungsgruppe $\mathfrak{S}$ der Ebene reden kann. *Für die Gruppe $\mathfrak{P}$ aller Perspektivitäten gilt nun die Produktdarstellung $\mathfrak{P} = \mathfrak{S}_p \mathfrak{T} \cong \mathfrak{S}\, \mathfrak{T}$ für jeden eigentlichen Punkt p.* Für jedes $\pi \in \mathfrak{P}$ gibt es nämlich ein $\tau \in \mathfrak{T}$, derart, daß $\pi^{-1} p = \tau^{-1} p$. $\sigma = \pi\, \tau^{-1}$ hat mithin den Fixpunkt p, also gilt die Darstellung $\pi = \sigma\, \tau$ mit $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ und $\tau \in \mathfrak{T}$. Aus $\mathfrak{S}_p \cap \mathfrak{T} = \{1\}$ folgt ferner die *Eindeutigkeit* dieser Produktdarstellung: Aus $\sigma\, \tau = \sigma'\, \tau'$; $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_p$ und $\tau, \tau' \in \mathfrak{T}$ folgt $\sigma = \sigma'$ und $\tau = \tau'$.

BAER gab in [3] (Thm. 6.2) die folgende einfache Kennzeichnung der Translationsebenen durch den kleinen DESARGUESschen Schließungssatz[11]).

Satz 4: *Genau dann ist eine affine Ebene eine Translationsebene, wenn in ihr der kleine* DESARGUES*sche Schließungssatz gilt.*

Zusatz. *Jede* DESARGUES*sche Ebene ist eine Translationsebene.*

§ 2. Translationsebenen und Gruppenpartitionen.

1. In diesem und den folgenden Paragraphen wird stets vorausgesetzt, daß die zu untersuchende Ebene eine transitive Translationsgruppe bezüglich einer Geraden U hat, also eine Translationsebene ist. Die Gerade U, bezüglich der die Translationsgruppe transitiv ist, wird im folgenden immer als uneigentlich angenommen. In diesem Paragraphen werden Translationsebenen mit gruppentheoretischen Methoden konstruiert, im nächsten wird gezeigt, daß man mit Hilfe dieser Konstruktion alle Translationsebenen erhält.

[11]) Zur kleinen DESARGUESschen Konfiguration vgl. etwa [8] Thm. L, S. 264 oder auch [15], S. 94.

G sei im folgenden eine Gruppe, deren Verknüpfung *additiv* geschrieben sei; 0 sei das neutrale Element von G. Mit $-a$ wird — wie üblich — die Lösung x von $a+x=0$ bezeichnet.

Definition 7. Eine *Partition* einer Gruppe G ist eine Menge $\mathfrak{P}$ *eigentlicher* Untergruppen von G mit der Eigenschaft: Jedes von 0 verschiedene Element von G liegt in *genau einer* Untergruppe von $\mathfrak{P}$.

Eine Partition ist also eine Überdeckung von G durch eine Menge eigentlicher Untergruppen, von denen je zwei nur die 0 gemeinsam haben. Die Gruppe G heißt auch die *Trägergruppe* oder kurz der *Träger* der Partition $\mathfrak{P}$. Die Untergruppen einer Partition heißen ihre *Komponenten*.

Nach § 1, Ziffer 3 gestattet z.B. die Gruppe aller Perspektivitäten mit fester Achse eine Partition, bestehend aus den Untergruppen aller Perspektivitäten mit festem Zentrum (vorausgesetzt, daß mindestens zwei verschiedene Zentren von Perspektivitäten existieren).

Definition 8. Eine *Kongruenz* $\mathfrak{K}$ einer Gruppe G ist eine Partition von G mit folgender zusätzlicher Eigenschaft: G ist Summe irgend zweier voneinander verschiedener Komponenten von $\mathfrak{K}$, d.h. aus $U, V \in \mathfrak{K}$ und $U \neq V$ folgt $G = U + V$.

Zum Beispiel lassen sich leicht Kongruenzen in der linearen Vektorgruppe vom Rang $2n$ über einem Schiefkörper finden, deren Komponenten Unterräume vom Rang n sind[12]). Deutet man diese *projektiv*, so erhält man eine Menge paarweise fremder $(n-1)$-dimensionaler linearer Unterräume, die den gesamten projektiven Raum (der die Dimension $2n-1$ hat) überdecken[13]).

2. Aus einer Kongruenz $\mathfrak{K}$ mit der dazugehörigen Trägergruppe G kann man nun auf folgende Weise eine (affine) Translationsebene $\alpha(\mathfrak{K})$ konstruieren:

(a) Die *Punkte* von $\alpha(\mathfrak{K})$ sind die Elemente von G.

(b) Die *Geraden* von $\alpha(\mathfrak{K})$ sind die *Rechtsrestklassen* $U+a$ $(a \in G)$ der zu $\mathfrak{K}$ gehörenden Untergruppen U.

Zunächst zeigen wir, daß $\alpha(\mathfrak{K})$ eine affine Ebene ist, d.h. die Gültigkeit der Axiome A 1—3 des § 1.

a und b seien voneinander verschiedene Elemente aus G. U_{b-a} sei die (wegen $b-a \neq 0$ eindeutig bestimmte) Komponente von $\mathfrak{K}$, die $b-a$ enthält. Die Gerade $U_{b-a}+a$ enthält offenbar a und b. Jede Gerade durch a hat die Form $V+a$ mit $V \in \mathfrak{K}$. Geht $V+a$ außerdem durch b, so liegt $b-a$ in $U_{b-a} \cap V$, also ist $U_{b-a} = V$. A 1 ist also erfüllt.

---

[12]) Der triviale Fall ist $n=1$. Genau alle Untermoduln vom Rang 1 sind dann Komponenten der Kongruenz. Es gibt aber auch (nichttriviale) Kongruenzen mit $n>1$. Vgl. die §§ 4 und 9.

[13]) Dies war meine ursprüngliche Definition der Kongruenz; die gruppentheoretische Deutung verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn R. Baer.

Im Falle $n=2$ kann man die Kongruenz deuten als zweiparametrige Geradenmannigfaltigkeit im dreidimensionalen Raum. Der Name „Kongruenz" rührt daher, daß man solche Geradenmannigfaltigkeiten in der Liniengeometrie häufig so bezeichnet.

Zum Beweis von A2 sind zunächst alle zu einer Geraden $U+a$ parallelen Geraden zu kennzeichnen. Wir beweisen den

Satz 5. *Zwei Geraden $U+a$ und $V+b$ $(U, V \in \mathfrak{R})$ sind genau dann parallel, wenn $U=V$.*

Die Rechtsrestklassen zu einer festen Untergruppe U sind paarweise fremd; zwei Geraden $U+a$ und $U+b$ sind also stets einander parallel. Die Umkehrung dieses Sachverhaltes folgt sofort aus dem folgenden gruppentheoretischen

Hilfssatz. *U und V seien zwei Untergruppen einer Gruppe G. $G=U+V$ gilt genau dann, wenn je zwei Rechtsrestklassen $U+a$ und $V+b$ stets ein Element gemeinsam haben.*

Beweis. Ist $c \in (U+a) \cap (V+b)$, d.h. $c=u+a=v+b$ für ein $u \in U$ bzw. $v \in V$, so $a-b=-u+v \in U+V$. Jedes Element aus G ist aber in der Form $a-b\,(a, b \in G)$ darstellbar, also ist $G=U+V$. Alle angegebenen Schlüsse sind umkehrbar, also gilt auch das „genau dann" des Hilfssatzes.

Ist nun $U \neq V$ $(U, V \in \mathfrak{R})$, so sind wegen $G=U+V$ und wegen des eben bewiesenen Hilfssatzes die Geraden $U+a$ und $V+b$ nicht parallel. Damit ist Satz 5 vollständig bewiesen.

Sei nun $U+a$ eine Gerade und b ein Punkt von $\alpha(\mathfrak{R})$. Jede Gerade durch b hat die Form $V+b$ für ein $V \in \mathfrak{R}$. Nach Satz 5 ist sie nur dann parallel zu $U+a$, wenn $U=V$. Es gibt mithin genau eine Parallele zu $U+a$ durch b, also gilt A2.

Mindestens zwei Untergruppen U und V aus $\mathfrak{R}$ enthalten mehr als ein Element. Bestünden nämlich alle von U verschiedenen Komponenten von $\mathfrak{R}$ nur aus dem Nullelement, so wäre $G=U$, im Widerspruch zur Definition einer Partition. Es gibt also von 0 verschiedene Gruppenelemente a und b aus U bzw. V. $0, a$ und b sind dann drei Punkte von $\alpha(\mathfrak{R})$, die nicht auf einer Geraden liegen, also ist auch A3 richtig.

Nun sind auch leicht die Translationen der affinen Ebene $\alpha(\mathfrak{R})$ anzugeben. Die Abbildungen $\bar{g}$, die durch

$$x \to x+g \tag{1}$$

definiert werden, sind Translationen, denn die Geraden $U+a$ werden durch sie in die zu ihr parallelen $U+a+g$ übergeführt und für $g \neq 0$ hat (1) keinen Fixpunkt. Der Punkt a wird in den Punkt b durch die Translation $\overline{-a+b}$ übergeführt. Also ist die Translationsgruppe transitiv, $\alpha(\mathfrak{R})$ *ist also eine Translationsebene.* Die Abbildungen (1) sind die *einzigen* Translationen von $\alpha(\mathfrak{R})$, denn gäbe es außer $\bar{g}$ eine weitere τ, die ein a in $a+g$ abbildet, so wäre $\tau^{-1}\bar{g}$ eine nichtidentische Perspektivität mit dem (eigentlichen) Fixpunkt a, was nach §1, Ziffer 3 nicht geht.

Wegen $\bar{h}\,\bar{g}\,(x)=x+g+h=\overline{g+h}\,(x)$ ist die eineindeutige Abbildung $g \leftrightarrow \bar{g}^{-1}$ ein *Isomorphismus* zwischen G und der Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ von $\alpha(\mathfrak{R})$. Also gilt

Satz 6. *Die Trägergruppe von $\mathfrak{R}$ ist isomorph zur Translationsgruppe von $\alpha(\mathfrak{R})$.*

Nach § 1, Satz 3 folgt dann

Satz 7. *Die Trägergruppe einer Kongruenz ist abelsch.*

Alle Komponenten einer Kongruenz sind mithin *Normalteiler* in ihrer Trägergruppe G. Daraus folgt, daß G *direkte Summe* von je zwei verschiedenen Komponenten U und V aus $\mathfrak{K}$ ist:

$$G = U \oplus V, \quad \text{wenn} \quad U, V \in \mathfrak{K} \quad \text{und} \quad U \neq V \text{ [14]}).$$

Wir können jetzt zeigen

Satz 8. *Alle Komponenten einer Kongruenz sind zueinander isomorph.*

Beweis. $\alpha(\mathfrak{K})$ ist eine affine Ebene, d.h. durch jeden ihrer Punkte gehen mindestens drei Geraden. Da die Geraden von $\alpha(\mathfrak{K})$ Restklassen von Komponenten von $\mathfrak{K}$ sind, so folgt, daß $\mathfrak{K}$ *mindestens drei Untergruppen enthält.* U, V und W seien nun paarweis verschiedene Untergruppen der Kongruenz $\mathfrak{K}$. Wegen

$$G = U \oplus W = W \oplus V$$

ist nach dem zweiten Isomorphiesatz der Gruppentheorie[15])

$$U \cong G/W \cong V, \tag{2}$$

womit die behauptete Isomorphie gewonnen ist.

§ 3. Kennzeichnung der Translationsebenen.

1. Es werden jetzt die Ergebnisse des vorigen Paragraphen umgekehrt, d.h. es wird gezeigt, daß sich jede Translationsebene als ein $\alpha(\mathfrak{K})$ darstellen läßt. Sei also A eine affine Translationsebene, G die Menge ihrer Punkte und $\mathfrak{T}$ ihre Translationsgruppe. Wir führen jetzt in G eine Verknüpfung ein (die wir additiv schreiben) und machen so G zu einer zu $\mathfrak{T}$ isomorphen Gruppe: Ein beliebiger, aber dann fester Punkt von G wird als *Nullpunkt* ausgezeichnet und 0 genannt. Nach § 1, Ziffer 3 (vgl. auch den Beweis von Satz 6) gibt es nun *genau eine* Translation $\bar{a}$, die 0 in a überführt. Die *Summe* zweier Punkte a und b wird dann definiert durch:

$$a + b = \bar{b}(a) = \bar{b}\,\bar{a}(0).$$

Durch Einführung dieser Addition wird G offenbar zu einer Gruppe isomorph zu $\mathfrak{T}$.

Die Punkte einer Geraden U durch 0 bilden eine Untergruppe von G, die ebenfalls U genannt wird. Das folgt sofort aus dem folgenden

Hilfssatz. *Genau dann ist $a \in U$, wenn die a (wie oben) zugeordnete Translation $\bar{a}$ die Gerade U in sich überführt.*

Ist nämlich $\bar{a}\,U = U$, so $\bar{a}(0) = a \in U$. Ist umgekehrt $a \in U$, so ist der Schnittpunkt von U mit der uneigentlichen Geraden das Zentrum der

[14]) Mit dem Symbol $\oplus$ wird die direkte Summation bezeichnet. Vgl. hierzu etwa [*20*], S. 75ff.

[15]) Vgl. [*20*], S. 32.

Translation $\bar{a}$, was ganz analog wie beim Beweis von Satz 2 gezeigt wird[16]), also ist $\bar{a}U = U$.

Sind nun $a, b \in U$, d.h. $U = \bar{a}U = \bar{b}U$, so ist $\overline{a-b}(U) = \bar{b}^{-1}\bar{a}(U) = U$, d.h. $a - b \in U$, also ist U eine Untergruppe von G. Die Menge aller dieser so (durch die Geraden durch 0) gegebenen Untergruppen von G nennen wir $\mathfrak{K}$.

Die übrigen Geraden aus A erhält man aus denen durch 0 durch eine Translation. Sei nämlich V eine Gerade durch a und U die (nach Axiom A2 existierende und eindeutig bestimmte) zu ihr parallele durch 0, so ist offenbar $V = \bar{a}U = U + a$. *Die Geraden sind somit die (Rechts-)Restklassen zu den Untergruppen aus* $\mathfrak{K}$.

Zwei Geraden $U + a$ *und* $V + b$ *sind genau dann parallel, wenn* $U = V$. Denn jedenfalls ist $U + b$ parallel zu $U + a$, weil $U + b$ sich aus $U + a$ durch Anwendung der Translation $\overline{-a+b}$ ergibt. Andererseits gibt es aber nach A2 nur *eine* Parallele zu $U + a$ durch b, also gilt auch das „genau".

Die Menge $\mathfrak{K}$ *aller so durch die Geraden durch* 0 *bestimmten Untergruppen von* G *bildet eine Kongruenz in* G. Zunächst einmal besteht wegen A3 die Menge $\mathfrak{K}$ nicht nur aus einer Untergruppe, ferner ist $\mathfrak{K}$ eine Partition in G, weil nach A1 durch jeden von 0 verschiedenen Punkt genau eine Gerade geht, die 0 enthält. Ist $U \neq V$, so sind die Geraden $U + a$ und $V + b$ ($U, V \in \mathfrak{K}$; $a, b \in G$) nach der letzten Bemerkung nicht parallel, haben also einen Punkt gemeinsam. Nun schließt man aus dem gruppentheoretischen Hilfssatz des letzten Paragraphen, daß $G = U + V$. Damit sind alle Kongruenzeigenschaften für $\mathfrak{K}$ bewiesen.

Der einzige willkürliche Schritt in der soeben durchgeführten Konstruktion der Kongruenz ist die Wahl des Nullpunktes; alle weiteren Schritte sind dann eindeutig. Wegen der Transitivität der Translationsgruppe ist es jedoch gleichgültig, *welchen* Punkt von A man als 0 auszeichnet. Die Kongruenz $\mathfrak{K}$ ist mithin durch die Translationsebene A eindeutig bestimmt. Sie werde $\varkappa(\mathsf{A})$ genannt.

2. In § 2 gelangten wir, ausgehend von einer Kongruenz $\mathfrak{K}$, zu einer Translationsebene $\alpha(\mathfrak{K})$. Jetzt kamen wir umgekehrt von einer Translationsebene A wieder zu einer Kongruenz $\varkappa(\mathsf{A})$. Es bleibt nun noch nachzuweisen, daß man durch Hintereinanderausführung dieser beiden Konstruktionen wieder zu der Ausgangsstruktur zurückkommt. Es muß also

$$\varkappa(\alpha(\mathfrak{K})) = \mathfrak{K} \tag{3}$$

und

$$\alpha(\varkappa(\mathsf{A})) = \mathsf{A} \tag{3'}$$

gezeigt werden [wobei allerdings — wie im folgenden erörtert — die Gl. (3) im Sinne einer Identifizierung der Trägergruppen gemäß einem Isomorphismus zu verstehen ist].

Beweis von (3). Zur Kongruenz $\varkappa(\alpha(\mathfrak{K}))$ gehört als Träger die Translationsgruppe von $\alpha(\mathfrak{K})$. Diese ist nach § 2 isomorph zur Trägergruppe G

[16]) Dem Punkt p in jenem Beweis entspricht hier 0, dem Punkt q hier a.

von $\mathfrak{K}$; wir können und wollen also den Träger von $\varkappa(\alpha(\mathfrak{K}))$ mit G identifizieren. $\varkappa(\alpha(\mathfrak{K}))$ ist also als eine Kongruenz von G aufzufassen. Ihre Komponenten sind nach Ziffer 1 genau die Geraden von $\alpha(\mathfrak{K})$ durch 0, mithin gerade die Komponenten von $\mathfrak{K}$. Also gilt (3).

Beweis von (3'). G sei die Menge aller Punkte von A. Nach Ziffer 1 kann G zur Trägergruppe von $\varkappa(\mathsf{A})$ gemacht werden. Die Komponenten der Kongruenz $\varkappa(\mathsf{A})$ sind dann (ebenfalls nach Ziffer 1) genau die Geraden von A durch den Punkt 0. Alle Geraden ergeben sich aus diesen durch Anwendung von Translationen, sind also Rechtsrestklassen der Komponenten von $\varkappa(\mathsf{A})$. Nach Definition der Ebene $\alpha(\varkappa(\mathsf{A}))$ (vgl. § 2) besteht diese aber aus genau denselben Geraden, also gilt auch (3').

Die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen können wir nun zusammenfassen in dem

Satz 9. *Es besteht eine eineindeutige Beziehung zwischen den Translationsebenen einerseits und den Kongruenzen andererseits. Nimmt man die Rechtsrestklassen der Komponenten einer Kongruenz als Geraden, so erhält man eine affine Translationsebene.*

Umgekehrt erhält man aus einer solchen eine Kongruenz, deren Trägergruppe die Translationsgruppe ist und deren Komponenten die Untergruppen derjenigen Translationen sind, die je eine Gerade der Ebene festlassen.

§ 4. Der Kern einer Translationsebene und seine Beziehung zur Streckungsgruppe.

In diesem Paragraphen soll die Struktur einer Gruppe G mit einer Kongruenz $\mathfrak{K}$ näher untersucht werden. Es wird sich zeigen, daß G als ein Vektorraum über einem Schiefkörper dargestellt werden kann.

Definition 9. Ein $\mathfrak{K}$-*Endomorphismus* einer Gruppe G mit der Kongruenz $\mathfrak{K}$ ist ein Endomorphismus von G (d.h. eine homomorphe Abbildung von G in sich), der jede Komponente von $\mathfrak{K}$ in sich abbildet. Die Menge aller dieser $\mathfrak{K}$-Endomorphismen von G heiße der *Kern* $K(\mathfrak{K})$ der Kongruenz $\mathfrak{K}$ oder auch der zugehörigen Translationsebene $\alpha(\mathfrak{K})$.

Summe $\varrho+\sigma$ und *Produkt* $\varrho\,\sigma$ zweier $\mathfrak{K}$-Endomorphismen ϱ und σ werden — wie üblich — durch

$$(\varrho+\sigma)\,g=\varrho\,g+\sigma\,g \quad \text{und} \quad (\varrho\,\sigma)\,g=\varrho(\sigma\,g) \qquad (g\in G)$$

definiert. Sie sind ebenfalls $\mathfrak{K}$-Endomorphismen, die Summe deswegen, weil G abelsch ist. Jetzt ist klar, daß die $\mathfrak{K}$-Endomorphismen mit den oben erklärten Verknüpfungen einen *Ring* bilden. Es gilt aber sogar der

Satz 10. *Der Kern* $K(\mathfrak{K})$ *einer Kongruenz* $\mathfrak{K}$ *ist ein Schiefkörper.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß jeder von 0 verschiedene $\mathfrak{K}$-Endomorphismus σ von G ein *Automorphismus* ist, d.h. es ist (a) aus $\sigma\,g=0$ $(g\in G;\ \sigma\neq 0)$ folgt $g=0$, und (b) $\sigma G=G$ zu beweisen.

(a) $\sigma \neq 0$ bedeutet: Es gibt ein $h \in G$ mit $\sigma h \neq 0$. Wir machen jetzt die folgende Fallunterscheidung:

(α) $g \notin U_h$[17]). Hieraus folgt $g - h \notin U_h$, d.h. $U_{g-h} \neq U_h$.

Wäre nun $0 = \sigma g = \sigma(g-h) + \sigma h$ für ein $g \neq 0$ aus G, so auch $\sigma h = -\sigma(g-h)$. Weil nun σ ein $\mathfrak{R}$-Endomorphismus ist, so wäre die linke Seite der letzten Gleichung in U_h und die rechte in U_{g-h}, also wäre $\sigma h = 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme; mithin ist $\sigma g \neq 0$.

(β) $g \in U_h$, $g \neq 0$. Weil $\mathfrak{R}$ aus mehr als einer Komponente besteht, gibt es jedenfalls ein $k \notin U_h$. Nach (α) ist $\sigma k \neq 0$. $g \notin U_k$ wegen $g \neq 0$, also folgt auch — wieder nach (α) — $\sigma g \neq 0$.

(b) h sei wie in (a) eingeführt. Zu zeigen ist: Zu jedem $g \in G$ gibt es ein $g' \in G$ mit $\sigma g' = g$, wenn $\sigma \neq 0$. Es werden dieselben Fallunterscheidungen wie in (a) gemacht.

(α) Aus $\sigma h \neq 0$ folgt $U_h = U_{\sigma h}$, also $U_{g-\sigma h} \neq U_g$. Mithin ist[18])

$$g' = (U_{g-\sigma h} + h) \cap U_g$$

ein einzelnes Gruppenelement. Nun ist

$$\sigma g' \subseteq \sigma(U_{g-\sigma h} + h) \cap \sigma U_g \subseteq (U_{g-\sigma h} + \sigma h) \cap U_g = g$$

(letzteres wegen $g \in U_g$ und $g = (g - \sigma h) + \sigma h \in U_{g-\sigma h} + \sigma h$), also ist $\sigma g' = g$.

(β) Sei wieder — wie in (a) — $k \notin U_h$, also $k \neq 0$. Nach (a) ist dann $\sigma k \neq 0$. Nach (α) gibt es nun wegen $g \notin U_k$ ein g' mit $\sigma g' = g$.

Damit ist die Existenz von σ^{-1} für jeden $\mathfrak{R}$-Endomorphismus $\sigma \neq 0$ gezeigt. Für jedes $V \in \mathfrak{R}$ folgt hieraus $\sigma V = V$, denn zu jedem $v \in V$ gibt es ein v' mit $\sigma v' = v$, und weil $\mathfrak{R}$ eine Kongruenz und σ ein $\mathfrak{R}$-Endomorphismus ist, so folgt $v' \in V$. Hieraus folgt $\sigma^{-1} V = V$, d.h. auch σ^{-1} ist ein $\mathfrak{R}$-Endomorphismus. Damit ist Satz 10 vollständig bewiesen[19]).

Die Trägergruppe G einer Kongruenz $\mathfrak{R}$ kann also aufgefaßt werden als abelsche Gruppe über einem Schiefkörper $K = K(\mathfrak{R})$ als Operatorenbereich, d.h. als ein Vektorraum über K. Als solcher soll G künftig betrachtet werden. Die Komponenten von $\mathfrak{R}$ sind K-invariante Untergruppen. Die in § 2, Satz 8 betrachteten Isomorphismen zwischen je zwei Komponenten von $\mathfrak{R}$ sind sogar K-Isomorphismen (d.h. Operatorisomorphismen bezüglich des Kernes K als Operatorenbereich), was ebenso wie in § 2 bewiesen wird. Hieraus folgt die Gleichheit der *Ränge* $(U:K)$ und $(V:K)$ von U bzw. V über K (d.h. der Mächtigkeit einer Basismenge von U bzw. V über K) für irgend zwei verschiedene $U, V \in \mathfrak{R}$, und schließlich wegen $G = U \oplus V$:

$$(G:K) = (U:K) + (V:K) = 2(U:K).$$

Hat also G über K einen endlichen Rang, so ist er gerade.

---

[17]) Zu der Bezeichnung U_h vgl. § 2, Ziffer 2.

[18]) Eine Menge $\{a\}$, die nur aus *einem* Element a besteht, wird hier und im folgenden mit diesem identifiziert.

[19]) Zu Satz 10 vgl. auch [1], Thm. 8. Die Elemente aus $\mathfrak{R}$ sind genau die „Homomorphismen" in [1].

Über die Beziehung des Kernes von $\mathfrak{K}$ zur Streckungsgruppe $\mathfrak{S}$ von $\alpha(\mathfrak{K})$ gibt Auskunft der

Satz 11. *Die Streckungen von $\alpha(\mathfrak{K})$ mit dem Fixpunkt 0 (d.h. die Streckungen aus $\mathfrak{S}_0$) sind genau die von 0 verschiedenen $\mathfrak{K}$-Endomorphismen.*

Die multiplikative Gruppe $K^\times$ der von 0 verschiedenen Elemente von $K(\mathfrak{K})$ ist also isomorph zu $\mathfrak{S}_0$.

Beweis. (a) Zunächst ist jeder $\mathfrak{K}$-Endomorphismus $\sigma \neq 0$ eine Streckung mit Fixpunkt 0, denn σ läßt 0 fest, und für jede Gerade $U + a$ ($U \in \mathfrak{K}$, $a \in G$) gilt

$$\sigma(U + a) = \sigma U + \sigma a = U + \sigma a,$$

d.h. σ führt jede Gerade in eine dazu parallele über.

(b) Sei nun umgekehrt σ eine Streckung aus $\mathfrak{S}_0$. Wir müssen zeigen, daß σ ein $\mathfrak{K}$-Endomorphismus in G ist. Wegen $\sigma U = U$ für jedes $U \in \mathfrak{K}$ genügt es zu zeigen, daß σ ein Endomorphismus in G ist.

Allgemein sei $\bar{b}$ diejenige Translation, die 0 in b überführt (vgl. § 3, Ziffer 1). Dann gilt

$$\overline{\sigma a} = \sigma \bar{a} \sigma^{-1} \qquad \text{für alle} \quad a \in G. \tag{4}$$

Beide Seiten von (4) sind nämlich Translationen in $\alpha(\mathfrak{K})$, die linke nach Definition und die rechte, weil die Translationsgruppe ein Normalteiler in der Gruppe aller Perspektivitäten (bezüglich der uneigentlichen Geraden) ist[20]). Ferner gilt:

$$\overline{\sigma a}(0) = \sigma a = \sigma(\bar{a}(0)) = \sigma \bar{a} \sigma^{-1}(0). \tag{5}$$

Die beiden Translationen in (4) führen also 0 in denselben Punkt σa über, stimmen mithin überein. Nun folgt aber:

$$\begin{aligned} \sigma(a + b) = \sigma(b + a) = \sigma(\bar{a}(b)) = (\sigma \bar{a})(b) \\ = (\sigma \bar{a} \sigma^{-1})(\sigma b) = \overline{\sigma a}(\sigma b) = \sigma a + \sigma b, \end{aligned}$$

also ist σ ein Endomorphismus in G, was bewiesen werden sollte. Wegen $\sigma \neq 0$ und weil σ ein $\mathfrak{K}$-Endomorphismus ist, folgt $\sigma \in K^\times$ mit $\mathfrak{S}_0 = K^\times$.

Zusatz 1. *Die Streckungsgruppe einer Translationsebene ist isomorph zur multiplikativen Gruppe eines Schiefkörpers.*

Die multiplikative Gruppe eines endlichen Schiefkörpers (d.h. eines Körpers) ist zyklisch[21]), also

Zusatz 2. *Die Streckungsgruppe einer Translationsebene mit endlich vielen Punkten ist zyklisch.*

Jede Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ ist eine $K(\mathfrak{K})$-Untergruppe; das Umgekehrte braucht jedoch nicht zu gelten. Vielmehr gilt

Satz 12. *Genau dann gehört jede eigentliche $K(\mathfrak{K})$-Untergruppe zu $\mathfrak{K}$, wenn die Ebene $\alpha(\mathfrak{K})$* Desarguessch *ist.*

---

[20]) Nach § 1, Ziffer 3.

[21]) Vgl. [*20*], S. 70/71.

Beweis. (a) Gehört jede eigentliche K-Untergruppe U zu $\mathfrak{R}$ [$K = K(\mathfrak{R})$ gesetzt], so enthält U insbesondere keine eigentliche K-Untergruppe (denn kein $U \in \mathfrak{R}$ enthält eine eigentliche zu $\mathfrak{R}$ gehörige Untergruppe). Jedes $U \in \mathfrak{R}$ hat also den Rang 1 über K. $G = U \oplus V$ ($U, V \in \mathfrak{R}$; $U \neq V$) hat den Rang 2 über K. G ist also zweidimensionaler Vektorraum über K, und die Geraden von $\alpha(\mathfrak{R})$ sind die Restklassen der eindimensionalen Unterräume.

Eine solche Ebene ist aber DESARGUESsch und hat K als Koordinatenschiefkörper.

(b) Sei nun umgekehrt $\alpha(\mathfrak{R})$ DESARGUESsch. Nach [3] Satz 6.2 ist dann die Streckungsgruppe $\mathfrak{S}_0 = K^\times$ transitiv in den von 0 verschiedenen Punkten jeder Geraden U durch 0. Aus $u, v \in U$ und $u \neq 0$ folgt die Existenz[22]) eines $\sigma \in K$ mit $v = \sigma u$. Also ist $(U:K) = 1$ für jedes $U \in \mathfrak{R}$ und mithin $(G:K) = 2$. Jede eigentliche K-Untergruppe von G hat demnach den Rang 1 über K, ist also von der Form Ku mit $u \in G$ und $u \neq 0$. Dies ist aber gerade diejenige Komponente von $\mathfrak{R}$, die u enthält. Jede eigentliche K-Untergruppe von G gehört also zu $\mathfrak{R}$, wie behauptet.

Es wurde gleich mitbewiesen der folgende

Zusatz. $\alpha(\mathfrak{R})$ *ist genau dann* DESARGUESsch, *wenn der Träger* G *der Kongruenz* $\mathfrak{R}$ *über dem Kern* $K(\mathfrak{R})$ *den Rang* 2 *hat. In diesem Fall ist* $K(\mathfrak{R})$ *der Koordinatenschiefkörper von* $\alpha(\mathfrak{R})$.

§ 5. Translationsebenen und Quasikörper.

1. Es soll nun der von M. HALL in [8], Thm. 6.3[23]) gefundene Zusammenhang zwischen Translationsebenen und gewissen verallgemeinerten Schiefkörpern dargestellt werden. Es werden für die eigentlichen Punkte einer Translationsebene Koordinaten eingeführt, die einer algebraischen Struktur angehören, für welche die meisten Körperaxiome erfüllt sind und die deshalb *Quasikörper* genannt werden.

Definition 10. Ein *Quasikörper* Q ist eine aus mindestens zwei Elementen bestehende algebraische Struktur, in der zwei Verknüpfungen — genannt *Addition* und *Multiplikation* — unbeschränkt durchführbar sind, und für welche die folgenden Axiome gefordert werden:

Q1. *Bezüglich der Addition ist* Q *eine Gruppe. Ihr neutrales Element werde* 0 *genannt.*

Q2. *Es gilt das linksseitige*[24]) *Distributivgesetz*

$$(b + c)\, a = b\, a + c\, a \quad \text{für alle} \quad a, b, c \in Q.$$

Q3. *Es gilt* $a \cdot 0 = 0$ *für alle* $a \in Q$.

[22]) Für $v \neq 0$ wegen der Transitivität von $\mathfrak{S}_0$, für $v = 0$ ist $\sigma = 0$ zu setzen.

[23]) Vgl. auch [10].

[24]) Die Bezeichnung „linksseitig" wird deshalb gewählt, weil Distributivität als eine Eigenschaft der Multiplikation *bezüglich der Addition* angesehen wird. Vgl. auch [5]. S. 56/59.

Q4. *Es gibt ein Einselement* 1 *derart, daß*

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

für alle $a \in Q$ *gilt.*

Q5. *Ist* $a \neq 0$, *so ist* $a\,y = b$ *eindeutig nach* y *lösbar.*

Q6. *Ist* $a \neq b$, *so ist* $-x\,b + x\,a = c$ *nach* x *lösbar.*

Das *rechtsseitige* Distributivgesetz $a(b+c) = a\,b + a\,c$ sowie das Assoziativgesetz der Multiplikation brauchen also in einem Quasikörper *nicht* zu gelten.

Mit $-a$ wird, wie üblich, die Lösung x von $a + x = x + a = 0$ bezeichnet. Für $b + (-a)$ und $(-a) + b$ schreiben wir kurz $b - a$ oder $-a + b$. Aus Q2 folgt sofort nach den üblichen Schlußweisen $0 \cdot a = 0$ und $(-a)\,b = -a\,b$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung Q5 schließt man: Aus $c \neq 0$ und $c\,a = c\,b$ folgt $a = b$, also die „linksseitige Kürzungsregel". Hieraus folgt mit Q2 die Eindeutigkeit der Lösung von Q6, denn aus $a \neq b$ und $-x\,b + x\,a = -y\,b + y\,a$ folgt $(x - y)\,a = (x - y)\,b$, also nach der eben erwähnten Kürzungsregel $x = y$.

Aus dieser Eindeutigkeit von Q5 folgt mit Q3 ($b = 0$ gesetzt!), daß $x\,a = c$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung x hat. Hieraus wieder folgt die *rechtsseitige Kürzungsregel*: Aus $c \neq 0$ und $a\,c = b\,c$ folgt $a = b$.

Beispiele von Quasikörpern sind, neben den Schiefkörpern, die *Alternativkörper* von MOUFANG und ZORN (s. etwa [*13*] oder [*8*] und [*9*]). In diesen gelten neben den Axiomen Q1–6 das rechtsseitige Distributivgesetz sowie die drei eingeschränkten Assoziativgesetze $(a\,a)\,b = a\,(a\,b)$, $(a\,b)\,a = a\,(b\,a)$ und $(b\,a)\,a = b\,(a\,a)$. Weitere spezielle Quasikörper untersuchte ZASSENHAUS in [*19*]. Für seine „*vollständigen Fastkörper*" forderte er neben dem Assoziativgesetz der Multiplikation statt Q6 zwar die Lösbarkeit von $x\,a = b$ für $a \neq 0$, doch kann man hieraus für *endliche* Bereiche leicht Q6 schließen[25]).

2. Aus einem Quasikörper Q kann man auf folgende Weise eine Translationsebene $\beta(Q)$ gewinnen:

(a) Die *Punkte* von $\beta(Q)$ sind die geordneten Paare (x, y) mit $x, y \in Q$.

(b) Die *Geraden* von $\beta(Q)$ sind die Mengen aller Punkte (x, y) mit:

$$y = x\,a + b \qquad \text{(bei festen } a, b \in Q) \tag{6}$$

oder mit:

$$x = c \qquad \text{(bei festem } c \in Q). \tag{6'}$$

Man rechnet leicht nach, daß bei den so gegebenen Punkten und Geraden die Axiome A1–3 erfüllt sind. Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn sie entweder beide die Form (6') oder beide die Form (6) mit gleichen Koeffizienten a von x haben.

Die Translationen von $\beta(Q)$ *sind genau die durch*

$$(x, y) \to (x + u, y + v) \qquad \text{(bei festen } u, v \in Q) \tag{7}$$

definierten Abbildungen.

[25]) Für endliche Quasikörper kann man nämlich aus der rechtsseitigen Kürzungsregel schließen: Aus $x \neq y$ folgt für $a \neq b$: $-x\,b + x\,a \neq -y\,b + y\,a$. Mit x durchläuft also auch $-x\,b + x\,a$ den ganzen endlichen Bereich. ZASSENHAUS forderte in [*19*] statt Q2 das rechtsseitige Distributivgesetz.

Die Abbildungen (7) sind jedenfalls Translationen, denn sie haben keinen (eigentlichen) Fixpunkt und sie führen die Gerade

$$y = xa + b \quad \text{in} \quad y = xa + (ua + b - v)$$

bzw.

$$x = c \quad \text{in} \quad x = c - u,$$

also jede Gerade in eine zu ihr parallele über. Die Abbildungen (7) sind transitiv auf der Ebene, denn der Punkt (a, b) wird in den Punkt (c, d) $(a, b, c, d \in Q)$ durch eine Translation (7) mit $u = -a + c$ und $v = -b + d$ übergeführt. Da es nur *eine* Translation gibt, die einen gegebenen Punkt in einen anderen vorgegebenen abbildet (vgl. etwa § 1, Ziffer 3), so liefern die Abbildungen (7) bereits *alle* Translationen von $\beta(Q)$, wie behauptet war. Ferner ist gezeigt, daß die Ebenen $\beta(Q)$ über einem Quasikörper Translationsebenen sind. Die Translationsgruppe von $\beta(Q)$ ist gemäß (7) isomorph zur direkten Summe $Q^+ \oplus Q^+$ der additiven Gruppe Q^+ des Quasikörpers Q mit sich. Nach § 1, Satz 3 ist die Translationsgruppe abelsch, also ist auch Q^+ abelsch.

Aus den Quasikörperaxiomen Q 1—6 kann mithin die Kommutativität der Addition geschlossen werden[26]:

Satz 13. *Die additive Gruppe eines Quasikörpers ist abelsch.*

HALL zeigte in [8], Thm. 6.3, daß sich umgekehrt zu jeder Translationsebene A (mindestens) ein Quasikörper Q finden läßt, derart, daß $\mathsf{A} \cong \beta(Q)$[27]:

Satz 14. *Genau die Translationsebenen sind Ebenen über einem Quasikörper gemäß der in* (6) *und* (6′) *beschriebenen Weise.*

Wir geben hier nur eine Skizze des Beweises von Satz 14. Genaueres kann in den eben zitierten Arbeiten von BAER und HALL nachgelesen werden.

A sei die gegebene affine Translationsebene. Zu zwei nicht parallelen Geraden G und H (den „Koordinatenachsen") und einem nicht auf $G \cap H$ gelegenen Punkt e von A (dem „Einheitspunkt") konstruieren wir (eindeutig) einen Quasikörper, der die gewünschten in Satz 14 geforderten Eigenschaften besitzt.

Zu jedem Punkt $a \in G$ gibt es genau eine Translation, die den „Nullpunkt" $G \cap H = 0$ in a überführt. Diese Translation können und wollen wir ebenfalls a nennen. Hintereinanderausführung zweier Translationen, die G in sich überführen, ergibt wieder eine mit dieser Eigenschaft; sie wird die *Summe* $a + b$ von a und b genannt: $(a + b)(0) = b(a(0))$. Dadurch werden die Elemente von G zu einer Gruppe (die später zur additiven Gruppe Q^+ unseres zu konstruierenden Quasikörpers Q wird).

[26]) Ein anderer — rein algebraischer — Beweis dieses Satzes findet sich in [14].

[27]) Vgl. auch [3]. BAER beweist dort (Thm. 4.1) einen analogen Satz für Ebenen, deren Translationsgruppe nur in *einer* Richtung transitiv ist ($p - U$-Transitivität für ein $p \in U$). Er kommt so zu Ebenen über einem „cartesischen Zahlsystem", das eine Verallgemeinerung des Quasikörpers darstellt. Statt $1 \cdot a = a$ fordert BAER $(-1)a = -a$. Vgl. auch [14].

Dem Punkt $a\,(0)$ (den wir mit a identifiziert haben) auf G geben wir die Koordinaten $(a, 0)$. Seien nun g und h die uneigentlichen Punkte von G und H in der (nach § 1, Ziffer 2) zu A gehörenden projektiven Ebene. Dem (eigentlichen) Punkt p auf der Verbindungsgeraden $K = \langle 0, e\rangle$ des Nullpunktes 0 mit dem Einheitspunkt e geben wir die Koordinaten (a, a), wenn $\langle p, h\rangle \cap G = (a, 0)$. Einem beliebigen Punkt $q \in \mathsf{A}$ geben wir nun die Koordinaten (a, b), wenn $\langle q, h\rangle \cap K = (a, a)$ und $\langle q, g\rangle \cap K = (b, b)$. Auf diese Weise wird jedem Punkt aus A ein geordnetes Paar (a, b) (dessen Elemente Translationen sind, die G festlassen) eineindeutig zugeordnet und umgekehrt läßt sich zu jedem solchen Paar auf diese Art ein Punkt aus A finden.

In der Menge aller Translationen, die G festlassen — wir wollen sie künftig mit Q bezeichnen — wird jetzt eine Multiplikation erklärt. Da der Einheitspunkt e in K liegt, hat er zwei gleiche Koordinaten, die 1 genannt werden: $e = (1, 1)$. Diese 1 wird das neutrale Element unserer Multiplikation.

Hat nun der Punkt $\langle 0, (1, b)\rangle \cap \langle h, (a, 0)\rangle$ die Koordinaten (a, c), so setzen wir $c = a\,b$. Durch diese Definition ist in Q die Multiplikation unbeschränkt und eindeutig durchführbar. Man zeigt nun leicht, daß Q mit den hier gegebenen Definitionen für die Addition und Multiplikation die Quasikörperaxiome $Q\,1-6$ erfüllt, ferner daß der Zusammenhang zwischen Q und unserer Translationsebene A genau der zu Beginn dieses Absatzes gegebene ist, d.h. also daß $\mathsf{A} = \beta(Q)$ ist.

Zu fest gegebenen Koordinatenachsen G und H und Einheitspunkt e kann also in der eben angedeuteten Weise ein Quasikörper Q eindeutig konstruiert werden. Geht man aber zu anderen Achsen bzw. anderem Einheitspunkt über, so ist der nun (bezüglich *dieses* Systemes) erhaltene Quasikörper im allgemeinen *nicht* zu Q isomorph[28]). Es können also zwei nicht isomorphe Quasikörper isomorphe Translationsebenen erzeugen.

§ 6. Der Kern eines Quasikörpers.

In einem Quasikörper gelten im allgemeinen nicht alle Schiefkörperaxiome. Der Wunsch, wenigstens in einer Teilmenge ebenso rechnen zu können, sowie einfache Beziehungen zur zugehörigen Translationsebene (vgl. Satz 17) führen zu der folgenden

Definition 11. Unter dem *Kern* $K(Q)$ eines Quasikörpers Q verstehen wir die Menge aller derjenigen $s \in Q$, für welche die Beziehungen

$$s(x + y) = s\,x + s\,y \quad \text{und} \quad s(x\,y) = (s\,x)\,y \tag{8}$$

für *alle* $x, y \in Q$ gelten.

Zunächst ist klar, daß die Elemente 0 und 1 von Q in $K = K(Q)$ liegen. K enthält also mindestens zwei Elemente. Es gilt aber außerdem der

Satz 15. *Der Kern $K = K(Q)$ eines Quasikörpers Q ist ein Schiefkörper. Q ist K-Linksmodul bezüglich der in Q definierten Addition und Multiplikation. Als solcher werde Q mit Q_K bezeichnet.*

[28]) Vgl. Fußnote 3.

Beweis. Zunächst wird gezeigt, daß mit s und t auch $s-t$ und st in K liegen:

$$(s-t)(x+y) = s(x+y) - t(x+y) = sx + sy - tx - ty$$
$$= sx - tx + sy - ty = (s-t)x + (s-t)y,$$
$$(s-t)(xy) = s(xy) - t(xy) = (sx)y - (tx)y = (sx - tx)y$$
$$= ((s-t)x)y,$$

d.h. $s-t \in K$. Ferner ist:

$$(st)(x+y) = s(t(x+y)) = s(tx+ty) = s(tx) + s(ty) = (st)x + (st)y,$$
$$(st)(xy) = s(t(xy)) = s((tx)y) = (s(tx))y = ((st)x)y,$$

d.h. $st \in K$.

Zur Schiefkörpereigenschaft von K ist dann nur noch zu zeigen:
Aus $t \neq 0$, $s, t \in K$ und $s = tu$ folgt $u \in K$:

$$t(u(x+y)) = (tu)(x+y) = s(x+y) = sx + sy = (tu)x + (tu)y$$
$$= t(ux) + t(uy) = t(ux + uy),$$

also wegen $t \neq 0$:

$$u(x+y) = ux + uy.$$

Ferner ist:

$$t(u(xy)) = (tu)(xy) = s(xy) = (sx)y = ((tu)x)y$$
$$= (t(ux))y = t((ux)y), \quad \text{also} \quad u(xy) = (ux)y,$$

d.h. $u \in K$.

Die letzte Behauptung von Satz 15 folgt unmittelbar aus der Definition von K.

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen dem Kern eines Quasikörpers Q und dem Kern der zugehörigen Translationsebene $\beta(Q)$. Es wird sich herausstellen, daß diese beiden Kerne isomorph sind, woraus unter anderem folgt, daß der Kern eines Quasikörpers Q *nur* von der zugehörigen Ebene $\beta(Q)$ abhängt. Zunächst zeigen wir hierfür

Satz 16. *Es sei* $\mathfrak{K}$ *die zu* $\beta(Q)$ *(nach* § 3*) gehörige Kongruenz. Dann sind die* $\mathfrak{K}$*-Endomorphismen* (vgl. § 4) *der Trägergruppe* $G = Q^+ \oplus Q^+$ *genau die durch*

$$(9) \qquad (x, y) \to (sx, sy) = s(x, y) \quad \text{mit} \quad s \in K(Q)$$

definierten Abbildungen[29]).

Beweis. Zunächst sind die Abbildungen (9) Endomorphismen von G wegen:

$$s((x, y) + (x', y')) = s(x + x', y + y') = (s(x + x'), s(y + y'))$$
$$= (sx + sx', sy + sy') = (sx, sy) + (sx', sy') = s(x, y) + s(x', y').$$

[29]) Auch aus diesem Satz folgt, daß der Kern eines Quasikörpers ein Schiefkörper ist.

Die Untergruppen aus $\mathfrak{R}$ sind genau die Geraden durch den Nullpunkt $(0, 0)$, sie bestehen also aus den Elementen $(x, x\,a)$ (a fest, x variabel) bzw. $(0, y)$ (y variabel). Nunmehr folgt leicht, daß die Untergruppen aus $\mathfrak{R}$ bei den Abbildungen (9) einzeln in sich übergeführt werden, denn:

$$s(x, x\,a) = \big(s\,x, s(x\,a)\big) = \big(s\,x, (s\,x)\,a\big) \quad \text{und} \quad s(0, y) = (0, s\,y).$$

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß die Abbildungen (9) bereits *alle* $\mathfrak{R}$-Endomorphismen darstellen. Dieser Beweis zerfällt in zwei Teile. Zunächst wird gezeigt:

(a) *Jeder $\mathfrak{R}$-Endomorphismus σ induziert in jedem* (nach § 5) *zu $\alpha(\mathfrak{R})$ gehörenden Quasikörper Q (eindeutig) eine Abbildung $\bar{\sigma}$ mit den Eigenschaften:*

$$(\alpha) \qquad \bar{\sigma}(a\,b) = \bar{\sigma}(a)\,b,$$

$$(\beta) \quad \bar{\sigma}(a + b) = \bar{\sigma}\,a + \bar{\sigma}\,b,$$

$$(\gamma) \qquad \sigma(a, b) = (\bar{\sigma}\,a, \bar{\sigma}\,b),$$

jeweils für alle $a, b \in Q$.

Beweis von (a). Weil die aus allen Elementen $(a, 0)$ bzw. $(0, b)$ $(a, b \in Q)$ bestehenden Untergruppen von $Q^+ \oplus Q^+$ (die aus $\mathfrak{R}$ sind) bei Anwendung eines $\sigma \in K(\mathfrak{R})$ in sich übergehen, so folgt:

$$\sigma(a, b) = \sigma(a, 0) + \sigma(0, b) = (\bar{\sigma}\,a, 0) + (0, \bar{\bar{\sigma}}\,b) = (\bar{\sigma}\,a, \bar{\bar{\sigma}}\,b).$$

$\bar{\sigma}$ und $\bar{\bar{\sigma}}$ sind hierdurch als Abbildungen von Q in sich definiert. Es ist aber $\bar{\sigma} = \bar{\bar{\sigma}}$, weil auch die aus allen (a, a) bestehende Untergruppe aus $\mathfrak{R}$ in sich übergeht. Man sieht jetzt sofort, daß die Bedingung (γ) zutrifft. (α) folgt nun daraus, daß auch die Untergruppe aller $(a, a\,b)$ für jedes feste b durch σ in sich abgebildet wird. (β) folgt sofort aus der Endomorphismeneigenschaft von σ.

(b) *$\bar{\sigma}$ sei eine Abbildung von Q auf sich, die den Bedingungen (α) und (β) von* (a) *genügt. Dann gibt es ein $s \in K(Q)$ mit*

$$\bar{\sigma}\,a = s\,a \quad \textit{für alle} \quad a \in Q.$$

Zum Beweis setze man $\bar{\sigma}(1) = s\,(\in Q)$, dann gilt wegen (α):

$$\bar{\sigma}\,a = \bar{\sigma}(1 \cdot a) = (\bar{\sigma}\,1)\,a = s\,a,$$

somit $s(a\,b) = \bar{\sigma}(a\,b) = (\bar{\sigma}\,a)\,b = (s\,a)\,b$. Die andere Kernbedingung für s folgt sofort aus (β).

Aus (a) und (b) folgt nun sofort, daß jeder $\mathfrak{R}$-Endomorphismus durch eine Abbildung (9) definiert werden kann. Damit ist Satz 16 vollständig bewiesen.

Jedem $\sigma \in K(\mathfrak{R})$ entspricht vermöge (9) eineindeutig ein $s \in K(Q)$. Diese eineindeutige Abbildung ist offenbar ein Isomorphismus zwischen den Kernen $K(\mathfrak{R})$ und $K(Q)$, also

Zusatz. *Der Kern eines Quasikörpers Q ist isomorph zum Kern der zugehörigen Translationsebene $\beta(Q)$ [d.h. der zugehörigen Kongruenz $\varkappa(\beta(Q))$].*

Der Kern $K(Q)$ hängt also *nur* von der Ebene $\beta(Q)$, *nicht* jedoch von der speziellen Wahl des Quasikörpers Q ab[30]. Der Kern ist also „geometrisch invariant". Es gilt nun sogar der

Satz 17. *Der Modul Q_K* (vgl. Satz 15) *und irgendeine Komponente aus der zugehörigen Kongruenz $\mathfrak{K} = \varkappa(\beta(Q))$ sind stets operator-isomorph über ihren Kernen* [*wobei deren Elemente gemäß* (9) *identifiziert werden*].

Hieraus folgt sofort der

Zusatz. *Q_K hängt nur von der Ebene $\beta(Q)$ ab, ist also eine „geometrische Invariante".*

Beweis. Da alle Komponenten von $\mathfrak{K}$ einander Kern-isomorph sind (vgl. Satz 8 und § 4), so genügt es, die Isomorphie von Q_K mit einer Komponente von $\mathfrak{K} = \varkappa(\beta(Q))$, etwa der aus allen $(a, 0)$ $(a \in Q)$ bestehenden, zu beweisen. Die Abbildung

$$a \leftrightarrow (a, 0)$$

ist dieser gesuchte Kern-Isomorphismus, wie sofort aus (9) folgt.

§ 7. Kollineationen in Translationsebenen.

1. Es sollen nunmehr die Kollineationen einer Translationsebene untersucht werden. Wir werden uns dabei auf die *affinen* Kollineationen beschränken. Das ist keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, denn bei den „meisten" Translationsebenen sind *alle* Kollineationen affin. Genauer gilt der

Satz 18. *Gestattet eine Translationsebene eine nichtaffine Kollineation, so erfüllt ein zu dieser Ebene* (nach § 5) *gehörender Quasikörper beide Distributivgesetze sowie das „Linkskürzungsgesetz"*

$$a^{-1}(a\,b) = b \tag{10}$$

[31]

für alle $a \neq 0$ und b aus dem Quasikörper.

Dieser Satz ist eine leichte Folgerung aus Untersuchungen von H. LENZ in [*12*][32]. Eine Translationsebene, die eine nichtaffine Kollineation gestattet, ist nämlich vom Typ VIb oder VII (nach den Bezeichnungen in [*12*]; das folgt daraus, daß die dort eingeführten Figuren bei Kollineationen in sich übergehen). Nun ist der Hilfssatz 7 von [*12*] anzuwenden.

Aus *beiden* Distributivgesetzen und der Linkskürzungsregel (10) folgt nun das *Linksalternativgesetz*

$$a(a\,b) = (a\,a)\,b \tag{10'}$$

für alle a, b aus dem Quasikörper. Der folgende Beweis hierfür stammt von G. PICKERT[33].

[30]) Vgl. die letzte Bemerkung des vorigen Paragraphen.

[31]) a^{-1} ist für $a \neq 0$ definiert durch $a^{-1}a = 1$. Aus (10) folgt, wenn $b = a^{-1}$ gesetzt wird, daß auch $a\,a^{-1} = 1$.

[32]) Hierbei ist zu berücksichtigen, daß in [*12*] die Geradengleichungen etwas anders lauten. Der Beweisgang ändert sich dadurch jedoch nicht wesentlich. Satz 18 wurde bereits in [*9*] und [*10*] bewiesen.

[33]) Vorgetragen auf der Tagung der DMV 1953.

Für $a=0$ oder $a=-1$ ist (10′) trivial; wir können also o.B.d.A. $a \neq 0$ und $a \neq -1$ annehmen. Dann gilt:

$$\left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)(a\,c)=a^{-1}(a\,c)-(a+1)^{-1}(a\,c)=c-(a+1)^{-1}(a\,c).$$

Multipliziert man von links mit $a+1$, so erhält man:

$$(a+1)\left[\left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)(a\,c)\right]=c$$
$$\left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)(a\,c)=(a+1)^{-1}c$$
$$a\,c=\left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)^{-1}\left[(a+1)^{-1}c\right].$$

Setzt man $c=a+1$, so ergibt sich:

$$a(a+1)=\left(a^{-1}-(a+1)^{-1}\right)^{-1}$$

und somit:

$$a\,c=[a(a+1)]\,[(a+1)^{-1}c].$$

Setzt man nun $c=(a+1)b$, so folgt:

$$a\,[(a+1)\,b]=[a(a+1)]\,b$$
$$a(a\,b+b)=(a^2+a)\,b,$$

mithin $a(a\,b)=a^2\,b$, was behauptet war.

Ein Quasikörper, in dem beide Distributivgesetze und das Linksalternativgesetz gelten, heißt ein *Linksalternativkörper*. Wir können nun sagen:

Zusatz 1. *Eine Translationsebene, die eine nichtaffine Kollineation gestattet, ist eine Ebene über einem Linksalternativkörper.*

Nach Skorniakow [*16*] ist jeder Linksalternativkörper der Charakteristik $\neq 2$ sogar *alternativ*, die zugehörige Ebene also eine Moufang-Ebene (d.h. eine Ebene, in welcher der kleine Desarguessche Satz für jede Gerade gilt). Also gilt

Zusatz 2. *Eine Translationsebene der Charakteristik* $\neq 2$[34]*, die eine nichtaffine Kollineation gestattet, ist eine* Moufang-*Ebene*[35].

2. Wir beschäftigen uns jetzt ausschließlich mit der Struktur der Gruppe $\mathfrak{A}$ der affinen Kollineationen (oder Affinitäten) einer Translationsebene. Wir können uns dabei im wesentlichen auf die Untergruppe $\mathfrak{A}_0$ derjenigen Affinitäten beschränken, die den Nullpunkt 0 festlassen. Affinitäten mit dieser Eigenschaft werden *homogen* genannt. Sei nämlich β irgendeine Affinität, die den Punkt 0 in p überführt. Ist wieder — wie in § 4 — $\overline{p}$ diejenige Translation die 0 in p überführt, so $\overline{p}^{-1}\beta=\alpha\in\mathfrak{A}_0$, also ist $\beta=\overline{p}\,\alpha$ und wir können schreiben

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{T}\,\mathfrak{A}_0, \tag{11}$$

wenn $\mathfrak{T}$ wieder die Translationsgruppe der Ebene ist.

[34]) Das bedeutet natürlich, daß kein Element der Translationsgruppe die Ordnung 2 hat.

[35]) Umgekehrt gestatten solche Ebenen wirklich nichtaffine Kollineationen. Vgl. dazu etwa [*8*].

Wegen $\mathfrak{T} \cap \mathfrak{A}_0 = \{1\}$ ist die Produktdarstellung *eindeutig* bestimmt: Aus $\beta = \tau\alpha = \tau'\alpha'$; $\tau, \tau' \in \mathfrak{T}$ und $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{A}_0$ folgt $\tau = \tau'$ und $\alpha = \alpha'$. Der zu $\mathfrak{A}_0$ gehörige Faktor der Affinität β heißt der *homogene Teil* $h(\beta)$ von β. Weil $\mathfrak{T}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{A}$ ist (vgl. § 1, Ziffer 4), so ist wegen (11): $\mathfrak{A}_0 \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{T}$, also gilt für beliebige $\beta_1, \beta_2 \in \mathfrak{A}$:

$$h(\beta_1 \beta_2) = h(\beta_1)\, h(\beta_2). \tag{11'}$$

Zusammenfassend können wir sagen: *Jede Affinität setzt sich eindeutig aus einer Translation und einer homogenen Affinität zusammen.* Im folgenden werden wir weitere Aussagen über homogene Affinitäten machen.

3. Satz 19. *Die homogenen Affinitäten einer Translationsebene* $\alpha(\mathfrak{K})$ *sind genau diejenigen semilinearen*[36]) *Transformationen der Trägergruppe von* $\mathfrak{K}$ (vgl. § 2, Ziffer 1) *über dem Kern* $K(\mathfrak{K})$, *die regulär*[37]) *sind und* $\mathfrak{K}$ (als *Ganzes*) *in sich überführen.*

Beweis. (a) α sei ein Element der Gruppe $\mathfrak{A}_0$ der homogenen Affinitäten. Durch α wird eine Gerade durch 0 wieder in eine solche übergeführt, also folgt $\alpha U \in \mathfrak{K}$ aus $U \in \mathfrak{K}$. Ferner ist α als Affinität nach Definition regulär. Es bleibt also noch die Semilinearität von α nachzuweisen. G sei die Trägergruppe der Kongruenz $\mathfrak{K}$, ferner $a \in G$. Weil $\mathfrak{T}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{A}$ ist, so zeigt man — ganz entsprechend wie in § 4, Satz 11 — daß

$$\overline{\alpha a} = \alpha\, \bar{a}\, \alpha^{-1}$$

und schließlich

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b \quad (a, b \in G)$$

gilt, d.h., daß α ein Automorphismus von G ist. $\Xi_0 = K(\mathfrak{K})^\times$ (vgl. § 4, Satz 11) ist Normalteiler in $\mathfrak{A}_0$, denn $\alpha\sigma\alpha^{-1}$ ($\sigma \in K(\mathfrak{K})^\times$, $\alpha \in \mathfrak{A}_0$) läßt den Punkt 0 fest und führt die Gerade $U + b$ ($U \in \mathfrak{K}$, $b \in G$) in die zu ihr parallele

$$\alpha\sigma\alpha^{-1}(U + b) = U + \alpha\sigma\alpha^{-1} b$$

über. Hieraus schließt man, daß mit σ auch $\alpha\sigma\alpha^{-1}$ in dem Kern K von $\mathfrak{K}$ liegt. Wir können also schreiben

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \alpha'(\sigma),$$

wobei α' ein Automorphismus in K ist (der durch eine Transformation mit einem $\alpha \in \mathfrak{A}_0$ induziert wird). Nunmehr gilt:

$$\alpha(\sigma a) = \alpha'(\sigma)\,(\alpha a).$$

α ist also eine semilineare Transformation, die $\mathfrak{K}$ in sich überführt.

(b) Sei nun umgekehrt α eine reguläre semilineare Transformation, die $\mathfrak{K}$ in sich überführt[38]). α ist eine eineindeutige Abbildung von G auf sich, die

[36]) Zum Begriff der semilinearen Transformation s. etwa [4], S. 42.

[37]) Eine Transformation heißt *regulär*, wenn sie ein Inverses besitzt.

[38]) Es genügt hierfür sogar vorauszusetzen, daß α ein *beliebiger* Automorphismus von G ist, der $\mathfrak{K}$ in sich überführt. Dann folgt aus (a), daß α sogar semilinear ist.

den Nullpunkt festläßt und wegen

$$\alpha(U+a) = \alpha U + \alpha a \qquad (U \in \mathfrak{R},\ a \in G)$$

Geraden wieder in Geraden überführt. Also ist $\alpha \in \mathfrak{A}_0$.

4. Eine wichtige Untergruppe von $\mathfrak{A}$ ist die Gruppe $\mathfrak{L}$ der *linearen Affinitäten*. Eine Affinität heißt *linear*, wenn ihr homogener Teil (s. Ziffer 2) durch eine *lineare* Transformation von G über K (gemäß Satz 19) induziert wird. Die Untergruppe $\mathfrak{L}_0$ der homogenen linearen Affinitäten ist ein *Normalteiler* in $\mathfrak{A}_0$, denn ist $\lambda \in \mathfrak{L}_0$, so auch $\alpha\,\lambda\,\alpha^{-1}$ $(\alpha \in \mathfrak{A}_0)$ wegen

$$\begin{aligned}\alpha\,\lambda\,\alpha^{-1}(\sigma\,a) &= \alpha\,\lambda\,(\alpha^{-1})'(\sigma)\,\alpha^{-1}(a) = \alpha\,\alpha'^{-1}(\sigma)\,\lambda\,\alpha^{-1}(a)\\ &= (\alpha'\,\alpha'^{-1})(\sigma)\,\alpha\,\lambda\,\alpha^{-1}(a) = \sigma\left(\alpha\,\lambda\,\alpha^{-1}(a)\right) \qquad (\sigma \in K).\end{aligned}$$

Nach dem dritten Isomorphiesatz der Gruppentheorie[39]) folgt nun, daß auch $\mathfrak{L}$ ein Normalteiler in $\mathfrak{A}$ ist; ferner gilt

$$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0 \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{T}/\mathfrak{L}/\mathfrak{T} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{L}. \tag{12}$$

Satz 20. *Die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ ist isomorph einer Gruppe von Automorphismen des Kernes K.*

Beweis. Ist Λ die Gruppe *aller* regulären linearen Transformationen von G über K, so ist nach Definition $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{A}_0 \cap \Lambda$, also

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{L} \cong \mathfrak{A}_0/\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{A}_0/\mathfrak{A}_0 \cap \Lambda \cong \mathfrak{A}_0\Lambda/\Lambda.$$

Nun ist aber $\mathfrak{A}_0\,\Lambda$ eine Untergruppe der Gruppe Γ *aller* regulären semilinearen Transformationen von G über K, also ist auch $\mathfrak{A}_0\Lambda/\Lambda$ eine Untergruppe von Γ/Λ. Diese ist aber isomorph zur vollen Automorphismengruppe von K, denn die durch

$$\gamma(\sigma\,a) = \gamma^*(\sigma)\,\gamma(a) \qquad (\gamma \in \Gamma,\ \sigma \in K)$$

definierte Abbildung $\gamma \to \gamma^*$ ist ein Homomorphismus von Γ auf die Automorphismengruppe von K wegen:

$$(\gamma\,\delta)^*(\sigma)\,\gamma\,\delta(a) = \gamma\,\delta(\sigma\,a) = \gamma\left(\delta^*(\sigma)\,\delta(a)\right) = \gamma^*\,\delta^*(\sigma)\,\gamma\,\delta(a),$$

und weil jeder Automorphismus von K sich als Bild γ^* eines $\gamma \in \Gamma$ darstellen läßt[40]). Bei diesem Homomorphismus werden genau die Elemente von Λ auf den identischen Automorphismus von K abgebildet.

Bei DESARGUESschen Ebenen sind die Komponenten von $\mathfrak{R}$ nach § 4, Satz 12 genau alle eigentlichen K-Untergruppen von G. Eine eigentliche K-Untergruppe geht aber bei *jeder* semilinearen Transformation wieder in eine solche über[41]). In diesem Fall führt also *jede* semilineare Transformation $\mathfrak{R}$

[39]) Vgl. etwa [*20*], S. 33.

[40]) Ist nämlich die Menge $\{a_\nu\}_{\nu \in N}$ eine *Basis* von G über K, so leistet die Abbildung γ, die durch $\sum_{\nu \in N} \sigma_\nu a_\nu \to \sum_{\nu \in N} \gamma^*(\sigma_\nu)\,a_\nu$ $(\sigma_\nu \in K$, nur endlich viele $\neq 0)$ definiert ist, offenbar das Gewünschte.

[41]) Vgl. etwa [*4*], Kap. III, 1.

(als Ganzes) in sich über, und man erhält $\Gamma = \mathfrak{A}_0$ und $\Lambda = \mathfrak{L}_0$, also den folgenden bekannten

Zusatz. *Für* DESARGUESsche *Ebenen ist* $\mathfrak{A}/\mathfrak{L}$ *isomorph zur vollen Automorphismengruppe von* K.

5. Unter den linearen Affinitäten erweisen sich nun wieder die „projektiven" als ausgezeichnet. Eine affine Kollineation (von der nicht vorausgesetzt wird, daß sie linear ist) heißt *projektiv*, wenn sie sich als Produkt affiner Perspektivitäten darstellen läßt. Dabei heißt natürlich eine Perspektivität affin, wenn sie die uneigentliche Gerade der Ebene festläßt; dies ist offenbar genau dann der Fall, wenn entweder das Zentrum oder die Achse uneigentlich ist (im letzteren Fall erhalten wir genau die Translationen und Streckungen)[42]).

Satz 21. *Die projektiven affinen Kollineationen bilden einen Normalteiler* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathfrak{A}$.

Beweis. $\mu \in \mathfrak{M}$ bedeutet: Es gibt affine Perspektivitäten $\pi_1, \ldots, \pi_r$ derart, daß $\mu = \pi_1 \ldots \pi_r$. Hieraus folgt sofort die Untergruppeneigenschaft von $\mathfrak{M}$. Ist $\alpha \in \mathfrak{A}$ und π eine affine Perspektivität, so auch $\alpha \pi \alpha^{-1}$. Hat nämlich π die Achse H und das Zentrum z, so hat $\alpha \pi \alpha^{-1}$ die Achse αH und das Zentrum αz. Ist H bzw. z uneigentlich, so auch αH und αz. Also ist mit μ auch

$$\alpha \mu \alpha^{-1} = \alpha \pi_1 \alpha^{-1} \ldots \alpha \pi_r \alpha^{-1} \quad \text{in } \mathfrak{M}.$$

Ebenso kann man zeigen, daß die homogenen projektiven Affinitäten einen Normalteiler $\mathfrak{M}_0$ in $\mathfrak{A}_0$ bilden.

Für das Folgende setzen wir den Kern K als *kommutativ* voraus.

Satz 22. *Jede projektive affine Kollineation ist linear, d.h.* $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}$[43]).

Beweis. Wegen $\beta = \tau \alpha$ ($\beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in \mathfrak{A}_0$, $\tau \in \mathfrak{T}$; vgl. Ziffer 2) ist eine Affinität genau dann projektiv, wenn ihr homogener Teil es ist. Es genügt also $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{L}_0$ zu zeigen. Aus $\mu \in \mathfrak{M}$, d.h. $\mu = \pi_1 \ldots \pi_r$ für geeignet gewählte Perspektivitäten $\pi_1, \ldots, \pi_r$ folgt für die homogenen Teile [vgl. (11′)]

$$h(\mu) = h(\pi_1) \ldots h(\pi_r).$$

Hieraus folgt, daß jede homogene projektive affine Kollineation sich als Produkt *homogener* affiner Perspektivitäten darstellen läßt. Wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{L}_0$ genügt es nun zu zeigen, daß jede homogene affine Perspektivität in $\mathfrak{L}_0$ liegt.

---

[42]) Es ist im allgemeinen Fall nicht bekannt, ob eine Affinität, die Produkt von Perspektivitäten ist, sich auch als Produkt *affiner* Perspektivitäten darstellen läßt. Im Falle einer DESARGUESschen Ebene ist dies richtig.

[43]) Dieser und der folgende Satz bleiben auch noch für einen nicht kommutativen Kern richtig (wie man ganz entsprechend zeigt), wenn man die Definition der projektiven affinen Kollineation so abändert, daß nur diejenigen Affinitäten „projektiv" genannt werden, die sich als Produkt von Translationen und affinen Perspektivitäten mit *eigentlicher* Achse darstellen lassen. Genau dann ist *jede* Streckung der Ebene projektiv in diesem Sinne, wenn der Kern kommutativ ist.

Ist die Achse einer solchen Perspektivität π uneigentlich, so ist π eine Streckung mit dem Fixpunkt 0, also nach § 4, Satz 11 (wegen der Kommutativität von K) linear. Eine homogene affine Perspektivität π, deren Zentrum im Uneigentlichen liegt, hat im Eigentlichen nur die Punkte der Achse zu Fixpunkten (vgl. etwa [3]). Die Achse von π geht also (wegen der Homogenität) durch den Nullpunkt. π wird also durch eine semilineare Transformation von G über K induziert, die ein $U \in \mathfrak{R}$ punktweise festläßt. Sei nun $a \in U$, $\sigma \in K$, so ist auch $\sigma a \in U$, d.h. es ist:

$$\pi(\sigma a) = \sigma a = \sigma \pi(a).$$

Hieraus folgt, daß der π zugeordnete Automorphismus π^* von K der identische ist; π ist also linear, wie behauptet war.

In DESARGUESsche *Ebenen gilt sogar* $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{M}_0$, *also auch* $\mathfrak{L} = \mathfrak{M}$. Zum Beweis knüpfen wir an § 4, Satz 12 und seinem Zusatz an. In diesem Fall ist $\mathfrak{L}_0 = A$. Nun seien $u, v \in G$ linear unabhängig (über K); dann bilden u, v eine Basis von G über K. Für ein vorgegebenes $\lambda \in \mathfrak{L}_0$ können wir nun o.B.d.A. λu und v als linear unabhängig annehmen, denn sonst ersetze man v durch $u + v$. Es sei $\pi_1 \in \mathfrak{L}_0$ durch $\pi_1 u = \lambda u$ und $\pi_1 v = v$ (eindeutig) bestimmt (wegen der eben angenommenen linearen Unabhängigkeit ist π_1 regulär und $\sigma u + \tau v$ $(\sigma, \tau \in K)$ wird durch π_1 in $\sigma \lambda u + \tau v$ abgebildet), ferner $\pi_2 \in \mathfrak{L}_0$ durch $\pi_2(\lambda u) = \lambda u$ und $\pi_2 v = \lambda v$. π_1 bzw. π_2 sind offenbar Perspektivitäten mit den Achsen Kv bzw. $K(\lambda u)$.

Nun ist $\lambda = \pi_2 \pi_1$, denn beide linearen Transformationen haben dieselbe Wirkung auf die Basiselemente u und v, mithin also auf jedes Element von G.

Für nicht-DESARGUESsche Ebenen kann $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$ sein, wie man an dem Beispiel einer Translationsebene über einem Fastkörper mit 9 Elementen zeigen kann[44]).

§ 8. Geometrische Deutung. Beispiele von Kongruenzen.

1. In § 4 wurde gezeigt, daß jede Trägergruppe G einer Kongruenz $\mathfrak{K}$ isomorph zu einem Vektorraum über einem Schiefkörper $K(\mathfrak{K}) = K$ — dem Kern von $\mathfrak{K}$ — ist. Ist nun k ein Unterschiefkörper von K, so läßt sich G natürlich auch auffassen als Gruppe mit k als Operatorenbereich, d.h. als Vektorraum über k. Sind zwei Untergruppen von G isomorph über K, so sind sie es erst recht über k. Hieraus folgt ebenso wie in § 4: Ist der Rang $(G:k)$ endlich, so ist er eine gerade Zahl, und es gilt

$$(G:k) = 2(U:k)$$

für jedes $U \in \mathfrak{K}$.

Deutet man — in üblicher Weise — eine über k einrangige k-Untergruppe von G als *Punkt* im projektiven $(2n-1)$-dimensionalen Raum über k $\big((G:k) = 2n$ gesetzt$\big)$, so werden die Komponenten von $\mathfrak{K}$ lineare Unterräume der Dimension $n-1$, denn die Dimension eines projektiven Raumes ist (definitionsgemäß) der um 1 verminderte Rang des zugehörigen Vektormoduls.

[44]) Hierüber werde ich in einer späteren Note berichten.

Man kann also eine solche Kongruenz $\mathfrak{K}$ *auffassen als Menge paarweise fremd liegender* $(n-1)$*-dimensionaler linearer Unterräume, die den gesamten* $(2n-1)$*-dimensionalen projektiven Raum über* k *überdecken*[45]).

Ist umgekehrt eine Menge $\mathfrak{K}$ von Unterräumen mit den eben beschriebenen Eigenschaften gegeben, so läßt sich diese auffassen als Kongruenz (die wir ebenfalls $\mathfrak{K}$ nennen wollen), deren Trägergruppe die Gruppe G der $2n$-reihigen Vektoren über k ist und deren Komponenten gerade diejenigen n-rangigen Untergruppen sind, die (vermöge der üblichen Zuordnung zwischen Vektorraum und projektiven Raum) den Unterräumen von $\mathfrak{K}$ entsprechen.

Zunächst ist nämlich $\mathfrak{K}$ eine Partition von G, denn durch $a \in G$ geht genau diejenige Untergruppe, die dem Unterraum aus $\mathfrak{K}$ durch den Punkt $k \cdot a$ (des projektiven Raumes) entspricht. Weil aber je zwei $(n-1)$-dimensionale Unterräume mit leerem Durchschnitt den gesamten $(2n-1)$-dimensionalen projektiven Raum aufspannen, so folgt auch die Kongruenzeigenschaft für $\mathfrak{K}$. Ferner gilt nun stets $k \leqq K(\mathfrak{K})$. Jedes $\sigma \in k$ ist nämlich ein Endomorphismus von G, der $\mathfrak{K}$ elementweise in sich überführt (also ein $\mathfrak{K}$-Endomorphismus, vgl. § 4, Definition 9); das bedeutet aber $\sigma \in K(\mathfrak{K})$.

Für $n=1$ ist $\mathfrak{K}$ einfach die Menge aller Punkte einer Geraden. Der einfachste nicht-triviale Fall ist mithin $n=2$. Dann besteht $\mathfrak{K}$ aus einer Menge paarweise windschiefer Geraden, die den projektiven dreidimensionalen Raum (über k) überdecken. Das bekannteste Beispiel einer solchen Kongruenz ist die *elliptische Geradenkongruenz* in dem dreidimensionalen projektiven Raum über dem reellen Zahlkörper. Sie besteht aus genau denjenigen reellen Geraden, die zwei konjugiert-komplexe Geraden (im projektiven Raum über dem *komplexen* Zahlkörper) schneiden. Die zur elliptischen Kongruenz gehörende Translationsebene ist die (DESARGUESsche) Ebene über dem komplexen Zahlkörper[46]).

2. Wir werden jetzt Verfahren angeben, durch welche man — ausgehend von einer DESARGUESschen Kongruenz (d.h. einer Kongruenz, die zu einer DESARGUESschen Ebene gehört) — zu Kongruenzen gelangt, die zu nicht-DESARGUESschen Ebenen gehören. Im folgenden sei $\mathfrak{K}$ eine Kongruenz, die eine PAPPOSsche Ebene erzeugt, d.h. es wird $(G:K)=2$ mit *kommutativem* Kern K vorausgesetzt. $\alpha(\mathfrak{K})$ kann dann (in der üblichen Weise) als Ebene über K dargestellt werden. $\mathfrak{K}$ besteht in diesem Fall genau aus den Geraden $y = x\,a$ (mit $a \in K$) und $x=0$.

P sei eine *endliche* Gruppe von Automorphismen von K. Ferner sei $\varkappa(\mathsf{P})$ der zu P gehörende *Invariantenkörper*, d.h. die Menge aller derjenigen $a \in K$, für die $\varrho\, a = a$ für alle $\varrho \in \mathsf{P}$ gilt. Nach einem Satz der GALOISschen Theorie (vgl. etwa [2], S. 42) ist der Rang von K über $\varkappa(\mathsf{P})$ gleich der Gruppenord-

[45]) Eine genau entsprechende Deutung ist auch für unendliches $(G:k)$ möglich; vgl. dazu etwa [4]. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier jedoch auf den endlichrangigen Fall.

Eine *einzige* Kongruenz kann auf diese Weise in *verschiedenen* projektiven Räumen dargestellt werden.

[46]) Vgl. etwa hierzu [17].

nung von P. Als *Norm* von $a \in K$ bezüglich P definieren wir nun:

$$N_{\mathsf{P}}(a) = \prod_{\varrho \in \mathsf{P}} \varrho\, a. \tag{13}$$

Die Norm $N_{\mathsf{P}}(a)$ liegt in dem Invariantenkörper $\varkappa(\mathsf{P})$, weil mit ϱ auch $\varrho'\varrho$ (für jedes feste $\varrho' \in \mathsf{P}$) ganz P durchläuft. Ferner folgt sofort aus der Definition (13) die *Produktregel*:

$$N_{\mathsf{P}}(a\,b) = N_{\mathsf{P}}(a)\, N_{\mathsf{P}}(b),$$

ferner, daß $N_{\mathsf{P}}(a) = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $a = 0$. Statt $N_{\mathsf{P}}(a)$ schreiben wir im folgenden auch kurz $N(a)$, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist.

Jedes $\varrho \in \mathsf{P}$ definiert in G eine bezüglich K semilineare Transformation

$$(x, y) \to (\varrho\, x, \varrho\, y) \tag{14}$$

für alle $x, y \in K$. Diese Abbildung können wir — ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen — ebenfalls mit ϱ bezeichnen. Die zu P isomorphe Gruppe aller Abbildungen (14) — sie werde ebenfalls P genannt — ist somit eine Untergruppe der Gruppe Γ aller semilinearen Transformationen von G über K.

Als P-*Regelschar* oder *Regelschar bezüglich* P zur Norm α [wo α ein von 0 verschiedenes Element aus $\varkappa(\mathsf{P})$ ist, das Norm eines $a \in K$ ist, d.h. das eine Darstellung (13) gestattet] bezeichnen wir die Menge aller Geraden $y = x\,a$ mit $N_{\mathsf{P}}(a) = \alpha$. Wir nennen diese Menge $\mathfrak{R}_\alpha$. Die Vereinigung aller dieser $\mathfrak{R}_\alpha$ ergibt, zusammen mit den Geraden U und V, die durch $y = 0$ bzw. $x = 0$ definiert sind, offenbar genau alle Geraden durch den Nullpunkt, d.h. die gesamte Kongruenz $\mathfrak{K}$.

Mit $|\mathfrak{R}_\alpha|$ bezeichnen wir die Menge aller derjenigen Punkte, die auf einer Geraden von $\mathfrak{R}_\alpha$ liegen. $|\mathfrak{R}_\alpha|$ wird der *Träger* der Schar $\mathfrak{R}_\alpha$ genannt[47]; er besteht also aus genau allen Punkten $(x, x\,a)$ mit $N_{\mathsf{P}}(a) = \alpha$. Die Träger überdecken, zusammen mit den Punkten von U und V, die Gruppe G, denn jedes Element von G hat die Form $(x, x\,a)$ mit $a \in K$ oder $(0, y)$. Ferner haben offenbar die Regelscharen $\mathfrak{R}_\alpha$ und $\mathfrak{R}_\beta$ für $\alpha \neq \beta$ keine Gerade gemeinsam, d.h. der Durchschnitt $|\mathfrak{R}_\alpha| \cap |\mathfrak{R}_\beta|$ besteht nur aus dem Nullelement $(0, 0)$.

Aus $\mathfrak{R}_\alpha$ erhält man durch Anwendung eines $\varrho \in \mathsf{P}$ eine *konjugierte Regelschar* $\varrho\,\mathfrak{R}_\alpha$, die aus allen $\varrho\,W$ mit $W \in \mathfrak{R}_\alpha$ besteht. Es ist

$$|\mathfrak{R}_\alpha| = |\varrho\,\mathfrak{R}_\alpha|$$

[47]) Ist K der komplexe Zahlkörper, $\varkappa(\mathsf{P})$ der reelle Zahlkörper (d.h. P die Automorphismengruppe von K, die aus $\underline{1}$ und der Abbildung $a \to \bar{a}$ besteht, wo $\bar{a}$ die zu a konjugiert-komplexe Zahl bedeutet), so stellt sich der Träger jeder Regelschar im reellen projektiven dreidimensionalen Raum dar als ein einschaliges Hyperboloid, das der Gleichung

$$\alpha\, x_0^2 + \alpha\, x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

genügt. In diesem Fall erhält man somit den aus der analytischen Geometrie her bekannten Begriff der Regelschar.

für jedes $\varrho \in \mathsf{P}$, denn $|\varrho\,\mathfrak{R}_\alpha|$ besteht aus genau allen Punkten $(x, x\,\varrho(a))$ mit $N(\varrho\,a) = N(a) = \alpha$.

Wir können jetzt aus der Kongruenz $\mathfrak{K}$, von der wir ausgegangen sind (und die aus genau allen Geraden $y = x\,a$ und $x = 0$ besteht), auf folgende Weise neue Kongruenzen konstruieren. Jedem $\alpha \neq 0$ aus $\varkappa(\mathsf{P})$, das Norm eines $a \in K$ ist, ordnen wir ein $\varrho_\alpha \in \mathsf{P}$ zu. Dann ist

$$\mathfrak{K}' = \{U\} \cup \{V\} \cup \bigcup_{\substack{0 \neq \alpha = N(a) \\ a \in K}} \varrho_\alpha\,\mathfrak{R}_\alpha$$

eine Kongruenz, welche dieselbe Trägergruppe G wie $\mathfrak{K}$ hat.

Beweis. Man kann nach Ziffer 1 die Kongruenz $\mathfrak{K}$ deuten als Menge von paarweise fremden $(n-1)$-dimensionalen Unterräumen im $(2n-1)$-dimensionalen projektiven Raum über $\varkappa(\mathsf{P})$, wenn $n = (K : \varkappa(\mathsf{P}))$ gesetzt wird, denn es ist $(G : \varkappa(\mathsf{P})) = (G : K)\,(K : \varkappa(\mathsf{P})) = 2n$[48]).

Nun stellen sich auch die Räume $\varrho_\alpha W$ $(W \in \mathfrak{R}_\varkappa \subseteq \mathfrak{K})$ als Unterräume der Dimension $n-1$, d.h. als Untergruppen von G mit dem Rang n über $\varkappa(\mathsf{P})$ dar. Alle $\varrho_\alpha W$ überdecken zusammen mit U und V ganz G wegen

$$U \cup V \cup \bigcup_{\substack{0 \neq \alpha = N(a) \\ a \in K}} |\varrho_\alpha\,\mathfrak{R}_\alpha| = U \cup V \cup \bigcup_{\substack{0 \neq \alpha = N(a) \\ a \in K}} |\mathfrak{R}_\alpha| = G.$$

Wegen

$$|\mathfrak{R}_\alpha| \cap |\mathfrak{R}_\beta| = 0$$

für $\alpha \neq \beta$ haben $\varrho_\alpha W$ und $\varrho_\beta Z$ $(W \in \mathfrak{R}_\alpha, Z \in \mathfrak{R}_\beta)$ nur den Nullpunkt $0 = (0, 0)$ gemeinsam; aus entsprechenden Gründen ist auch $\varrho_\alpha W \cap U = \varrho_\alpha W \cap V = 0$. Ebenso haben aber auch $\varrho_\varkappa W$ und $\varrho_\varkappa Z$ nur 0 gemeinsam, falls $W \neq Z$ beide aus einem $\mathfrak{R}_\alpha$, wegen

$$\varrho_\alpha W \cap \varrho_\alpha Z = \varrho_\alpha (W \cap Z) = \varrho_\alpha (0) = 0.$$

$\mathfrak{K}'$ ist also eine Partition in G, nach den am Anfang dieses Beweises Bemerkten folgt aber nach Ziffer 1 sofort die Kongruenzeigenschaft für $\mathfrak{K}'$. Mithin ist $\alpha(\mathfrak{K}')$ eine Translationsebene.

Bilden wir nun statt $\mathfrak{K}'$ die Kongruenz

$$\mathfrak{K}'' = \{U\} \cup \{V\} \cup \bigcup_{\substack{0 \neq \alpha = N(a) \\ a \in K}} \varrho\,\varrho_\alpha\,\mathfrak{R}_\alpha,$$

so ist wegen $\varrho\,U = U$ und $\varrho\,V = V$ auch $\mathfrak{K}'' = \varrho\,\mathfrak{K}'$. Es entsteht also $\mathfrak{K}''$ aus $\mathfrak{K}'$ durch Anwendung eines Automorphismus ϱ von G. Durch diesen geht die Gerade $W + a$ von $\alpha(\mathfrak{K}')$ in die Gerade $\varrho W + \varrho\,a$ von $\alpha(\mathfrak{K}'')$ über. Die Ebenen $\alpha(\mathfrak{K}')$ und $\alpha(\mathfrak{K}'')$ sind also isomorph. Wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $\varrho_\alpha = \underline{1}$ für ein α — etwa für $\alpha = 1 = N(1)$ — gilt. Sind nun alle $\varrho_\beta = \underline{1}$, so ist $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$, mithin $\alpha(\mathfrak{K}')$ DESARGUESsch.

Ist für ein β jedoch $\varrho_\beta \neq \underline{1}$, so ist $\alpha(\mathfrak{K}')$ eine nicht-DESARGUESsche Translationsebene, wie jetzt gezeigt werden soll.

---

[48]) k in Ziffer 1 ist hier durch $\varkappa(\mathsf{P})$ ersetzt.

Da die durch den Nullpunkt von $\alpha(\mathfrak{R}')$ gehenden Geraden nach der Definition von $\mathfrak{R}'$ die Gleichungen

$$y = \varrho_{N(a)}(x)\, a$$

bzw. $y = 0$ und $x = 0$ erfüllen, so können wir zu $\alpha(\mathfrak{R}')$ (gemäß den Untersuchungen des § 5) einen Quasikörper Q auf folgende Weise gewinnen:

a) *Die Elemente von Q stimmen mit denen von K überein.*

b) *Die Addition von Q ist wie in K definiert.*

c) *Die Multiplikation $\circ$ von Q wird erklärt durch:*

$$a \circ b = \begin{cases} 0 & b = 0 \\ \varrho_{N(b)}(a)\, b & b \neq 0, \end{cases}$$

wo $\varrho_{N(b)} \in \mathsf{P}$ und $\varrho_{N(1)} = \varrho_1 = \underline{1}$[49]).

Dieser Bereich Q ist in der Tat ein Quasikörper, denn das Axiom Q1 folgt unmittelbar aus a), Q2 folgt aus der Automorphismeneigenschaft von $\varrho_{N(b)}$, Q3 aus der Definition c) und Q4 aus $\varrho_1 = \underline{1}$. Weil die (zu Q gehörende) Ebene $\alpha(\mathfrak{R}')$ eine affine Ebene darstellt, so folgt aus A1 (vgl. § 1) das Axiom Q5. Schließlich ergibt sich Q6, weil in einer affinen Ebene zwei nichtparallele Geraden sich stets schneiden.

Ist nun $\mathfrak{R}' \neq \mathfrak{R}$, d.h. gibt es ein b mit $\varrho_{N(b)} \neq \underline{1}$, so ist Q *kein* Schiefkörper, d.h. $\alpha(\mathfrak{R}')$ eine nicht-DESARGUESsche Ebene. Gelte nämlich in Q das *rechtsseitige* Distributivgesetz

$$a \circ (1 + b) = a + a \circ b$$

d.h.

$$\varrho_{N(1+b)}(a)\,(1 + b) = a + \varrho_{N(b)}(a)\, b$$

für alle a und $b \neq 0, -1$, so müßte die Abbildung $\varrho_{N(1+b)}$, die durch

$$\varrho_{N(1+b)}(a) = \frac{a + \varrho_{N(b)}(a)\, b}{1 + b} \qquad (b \neq 0, -1)$$

definiert ist, ein Automorphismus in K sein, d.h. es müßte gelten:

$$\varrho_{N(1+b)}(a\, a') = \varrho_{N(1+b)}(a)\, \varrho_{N(1+b)}(a')$$

für alle $a, a' \in K$. Das bedeutet aber:

$$\left(a + \varrho_{N(b)}(a)\, b\right)\left(a' + \varrho_{N(b)}(a')\, b\right) = (1 + b)\left(a\, a' + \varrho_{N(b)}(a\, a')\, b\right).$$

Hieraus folgt nach einfacher Umrechnung, wenn man berücksichtigt, daß $\varrho_{N(b)}$ ein Automorphismus von K ist:

$$\left(\varrho_{N(b)}(a) - a\right)\left(\varrho_{N(b)}(a') - a'\right) = 0$$

für alle $a, a' \in K$, also $\varrho_{N(b)}(a) = a$ für alle $a \in K$, d.h. $\varrho_{N(b)} = \underline{1}$, im Widerspruch zu unserer Annahme.

[49]) ZASSENHAUS definierte in [19], S. 191 im wesentlichen auf diese Art (mit einer Zusatzbedingung, die dem Assoziativgesetz der Multiplikation entspricht) vollständige Fastkörper, die keine Schiefkörper sind. Das Assoziativgesetz der Multiplikation gilt genau dann, wenn $\varrho_{N(ab)} = \varrho_{N(a)N(b)} = \varrho_{N(a)}\varrho_{N(b)}$ für alle $a, b \in Q$ gilt.

Ist ein $s \in Q$ in dem Kern von Q, so ist dafür eine *notwendige* Bedingung

$$s \circ (1 + a) = s + s \circ a \quad \text{für alle} \quad a \in Q.$$

Hieraus ergibt sich — ganz entsprechend wie eben:

$$\varrho_{N(a)}(s) = s \quad \text{für alle} \quad a \neq 0 \quad \text{aus} \quad Q. \tag{15}$$

Diese notwendige Bedingung (15) ist aber auch hinreichend, denn genügt s dieser Bedingung, so ist $s \circ a = s\,a$, woraus für dieses s sofort die Gültigkeit des rechtsseitigen Distributivgesetzes für alle $a, b \in Q$ folgt.

Es gilt aber auch

$$s \circ (a \circ b) = s(a \circ b) = s\,\varrho_{N(b)}(a)\,b = \varrho_{N(b)}(s\,a)\,b = s\,a \circ b = (s \circ a) \circ b$$

für alle a und $b \neq 0$ aus Q, aber trivialerweise auch für $b = 0$.

Genau dann ist also ein s in dem Kern von Q, wenn es der Bedingung (15) *genügt.*

Insbesondere umfaßt der Kern also den Invariantenkörper $\varkappa(\mathsf{P})$.

Literatur.

[1] ARTIN, E.: Coordinates in affine geometry. Rep. Math. Coll. Univ. Notre Dame (2) **2**, 15—20 (1940). — [2] ARTIN, E.: Galois-Theory, 2. Aufl. Notre Dame mathematical lectures Nr. 2. Notre Dame, Ind. 1946. 82 S. — [3] BAER, R.: Homogeneity of projective planes. Amer. J. Math. **64**, 137—152 (1942). — [4] BAER, R.: Linear algebra and projective geometry. New York: Academic Press Inc. 1952. 318 S. — [5] BOURBAKI, N.: Eléments de mathématicque. Livre II: Algèbre. Chapitre I: Structures algébriques. Paris, Hermann & Cie. 1942. 165 S. — [6] BIRKHOFF, G.: Lattice theory, 2. Aufl. American Mathematical Society Colloquium Publications, Bd. 25. New York 1948. 235 S. — [7] BRUCK, R. H., and E. KLEINFELD: The structure of alternative division rings. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 878—890 (1951). — [8] HALL, MARSHALL: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [9] HALL, MARSHALL: Corrections to „projective planes". Trans. Amer. Math. Soc. **65**, 473—474 (1949). — [10] GINGERICH, H. F.: Generalized fields and Desargues configurations. Abstract of a Thesis of the University of Illinois, Urbana, Ill. 1945. 12 S. — [11] KLEINFELD, E.: Alternative division rings of characteristic 2. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **37**, 818—820 (1951). — [12] LENZ, H.: Kleiner desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. Erscheint im Jahresbericht der DMV. — [13] MOUFANG, R.: Alternativkörper und der Satz vom vollständigen Vierseit. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **9**, 207—222 (1933). — [14] PICKERT, G.: Nichtkommutative cartesische Gruppen. Arch. Math. **3**, 335—342 (1952). — [15] REIDEMEISTER, K.: Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930. 147 S. — [16] SKORNIAKOW, L. A.: Rechtsalternativkörper. Izvestija Akad. Nauk. SSSR. Ser. Mat. **15**, 177—184 (1951) (russisch). — [17] WEISS, E. A.: Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation I. Dtsch. Math. **1**, 23—37 (1936). — [18] YOUNG, J. W.: On the partitions of a group and the resulting classification. Bull. Amer. Math. Soc. **33**, 453—461 (1927). — [19] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 187—220 (1936). — [20] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. Hamburger mathematische Einzelschriften, H. 21. Leipzig 1937. 151 S.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 11. Januar 1954.)

Stallmann, F.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 187—212 (1954)

Konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. I.

Von
Friedemann Stallmann.

Einleitung.

Die konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen bietet ein besonderes Interesse nicht nur wegen der großen Zahl von wichtigen physikalischen und technischen Problemen, die auf solche Abbildungsaufgaben führen, sondern auch wegen der darin enthaltenen Möglichkeit, analytische Sachverhalte geometrisch zu deuten. Die Theorie geht bekanntlich zurück auf H. A. Schwarz, der als erster die Zusammenhänge mit den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse klar herausstellte. Später hat dann vor allem F. Klein diese Ideen weiter verfolgt und für eingehende Untersuchungen der hypergeometrischen und der Laméschen Differentialgleichungen ausgewertet. Seitdem sind auf diesem Gebiet keine wesentlichen Fortschritte mehr erzielt worden, offenbar deshalb, weil die bisherigen Methoden nicht ausreichten, die noch ausstehenden Fragen zu lösen.

In meiner Dissertation[1]) habe ich versucht, diesen Problemkreis mit den Methoden der asymptotischen Integration von Differentialgleichungen anzugreifen. Dabei haben sich diese Methoden als durchaus fruchtbar erwiesen, und haben nicht nur zu Einblicken in die Struktur der Lösungen, sondern auch zu brauchbaren numerischen Ergebnissen geführt. Im folgenden sollen diese Methoden in erweiterter Form und mit einigen Anwendungen auf die Lamésche Differentialgleichung dargelegt werden. Wir werden uns dabei nicht auf Differentialgleichungen der Fuchsschen Klasse beschränken; die Methoden der asymptotischen Integration sind ja überhaupt zunächst nur zur Untersuchung einer Differentialgleichung in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen angewandt worden. Zudem kann man sich jede Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten aus einer Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse durch Konfluenz hervorgegangen denken. Der entsprechende Grenzübergang bei den Kreisbogenpolygonen durchgeführt ergibt Gebiete, die neben den Kreisbögen noch durch logarithmische Windungspunkte berandet sind. Wir gewinnen so Anschluß an die Nevanlinnasche Theorie der Riemannschen Flächen mit nur endlich vielen logarithmischen Windungspunkten, wie es überhaupt auf diese Weise möglich wird, die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit rationalen Koeffizienten unter einheitlichen Gesichtspunkten zu betrachten.

Die Arbeit entstand im Rahmen eines Forschungsauftrages der Deutschen Forschungsgemeinschaft im mathematischen Institut der Justus Liebig-Hochschule Gießen bei Herrn Professor E. Ullrich. Ihm gilt mein besonderer Dank für die freundliche Förderung dieser Arbeit.

[1]) Stallmann [*10*].

§ 1. Grundlegende Sätze.

1.1. Ein Kreisbogenpolygon — im folgenden kurz *Polygon* genannt — sei ein einfach zusammenhängendes RIEMANNsches Flächenstück, das durch endlich viele Kreisbögen und eventuell endlich viele logarithmische Windungspunkte berandet ist[2]). Treten keine logarithmischen Windungspunkte auf, so sprechen wir von einem *gewöhnlichen*, andernfalls von einem *außergewöhnlichen* Polygon. Ferner sei eine rationale Funktion, die auf der reellen Achse nur reelle Werte annimmt und deren sämtliche Pole auf der reellen Achse liegen, als *reelle rationale Funktion* bezeichnet. Mit diesen Definitionen gelten die beiden folgenden Sätze:

1. *Ist $\eta(x)$ eine analytische Funktion, die die obere Halbebene konform auf ein Polygon abbildet, so ist ihre* SCHWARZsche *Ableitung*

$$[\eta]_x = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$$

eine reelle rationale Funktion.

2. *Jede Lösung der Differentialgleichung*

$$[\eta]_x = R(x),$$

wo $R(x)$ eine reelle rationale Funktion ist, bildet die obere Halbebene auf ein Polygon ab.

Für gewöhnliche Polygone sind diese Sätze schon von H. A. SCHWARZ bewiesen. Für außergewöhnliche Polygone sind sie meines Wissens hier zum erstenmal ausgesprochen. Sie ergeben sich als eine leichte Verallgemeinerung der Sätze von R. NEVANLINNA über RIEMANNsche Flächen mit endlich vielen logarithmischen Windungspunkten[3]). Den genauen Beweis übergehen wir hier, weil er an dieser Stelle zuviel Raum beanspruchen würde und wir ihn für die folgenden Überlegungen nicht benötigen.

1.2. Von der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$[\eta]_x = R(x) \tag{1.1}$$

gehen wir über zu der zugehörigen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit reellen rationalen Koeffizienten

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0. \tag{1.2}$$

Bekanntlich ist die SCHWARZsche Ableitung des Quotienten $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ zweier linear unabhängiger Lösungen von (1.2)

$$[\eta]_x = 2q(x) - \tfrac{1}{2}p^2(x) - p'(x) = R(x). \tag{1.3}$$

Wir beschränken uns im folgenden auf die Differentialgleichung

$$y'' + \tfrac{1}{2}R(x)\,y = 0. \tag{1.4}$$

---

[2]) Diese Definition bedürfte noch der Präzisierung; hierzu wären jedoch recht mühsame topologische Untersuchungen nötig, die für das Folgende ohne Bedeutung sind und daher hier nicht durchgeführt werden sollen.

[3]) NEVANLINNA [9].

Es soll also weiterhin $\eta(x)$ stets als der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen von (1.4) betrachtet werden.

1.3. Das Verhalten der Lösungen von (1.4) in der Umgebung einer Stelle $x = x_0$ bedingt die Einteilung in *reguläre, außerwesentlich* und *wesentlich singuläre Stellen* der Differentialgleichung. Eine *reguläre Stelle* im Endlichen[4]) liegt vor, wenn $R(x)$ dort regulär ist. Es sind dann dort sämtliche Lösungen von (1.4) regulär. An einer *außerwesentlichen Singularität* im Endlichen[4]) darf $R(x)$ einen Pol höchstens zweiter Ordnung besitzen. Das Verhalten der Lösungen in der Umgebung einer solchen Stelle wird durch den Koeffizienten (-2)-ter Ordnung in der LAURENT-Entwicklung von $R(x)$ bestimmt. Sei

$$\lim_{x \to x_0} 2(x - x_0)^2 R(x) = 1 - \delta^2, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arc \delta \leqq +\frac{\pi}{2}\right),$$

so besitzt (1.4) ein Paar von *kanonischen Lösungen*, die sich in der Umgebung von x_0 in die folgenden Potenzreihen entwickeln lassen:

$$(1.5) \qquad \begin{cases} y^{(1)} = (x - x_0)^{\frac{1+\delta}{2}} (1 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots) \\ y^{(2)} = (x - x_0)^{\frac{1-\delta}{2}} (1 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \cdots), \end{cases}$$

oder, falls δ gleich einer ganzen Zahl ist

$$y^{(2)} = C\, y^{(1)} \log (x - x_0) + (x - x_0)^{\frac{1-\delta}{2}} (1 + b_1(x - x_0) + \cdots).$$

In der Umgebung einer solchen Stelle sind also die Lösungen von (1.4) und damit $\eta(x)$ im allgemeinen verzweigt. $\eta(x)$ bildet die obere Halbebene in der Umgebung einer solchen Stelle auf eine Ecke des Polygons ab, die dort einen Innenwinkel der Größe $\delta\pi$ einschließt. Dabei soll dieser Winkel wie üblich in der nichteuklidischen Maßbestimmung gemessen werden.

1.4. Das charakteristische Kennzeichen dieser Entwicklungen ist es, daß durch das Glied

$$(x - x_0)^{\frac{1\pm\delta}{2}} \qquad \text{bzw.} \qquad (x - x_0)^{\frac{1+\delta}{2}} \log (x - x_0)$$

das Verhalten der Lösungen in der Umgebung von x_0 schon vollständig bestimmt ist, weshalb man in diesem Zusammenhang auch von *Stellen der Bestimmtheit* der Differentialgleichung spricht. Diese Eigenschaft geht verloren bei Entwicklungen in der Umgebung *wesentlich singulärer Stellen* der Differentialgleichung, die vorliegen, wenn $R(x)$ im Endlichen[4]) einen Pol höherer als zweiter Ordnung hat. Dann treten an die Stelle der TAYLOR-Reihen in (1.5) LAURENT-Reihen, und es bleibt zunächst unbestimmt, in welcher Weise die Umgebung einer solchen Stelle durch die Funktion $\eta(x)$ abgebildet wird.

[4]) Das Verhalten der Lösungen in der Umgebung von $x = \infty$ erkennt man aus einer Transformation der Differentialgleichung, bei der diese Stelle ins Endliche gebracht wird. Danach ist $x = \infty$ eine *reguläre, außerwesentlich* oder *wesentlich singuläre* Stelle der Differentialgleichung (1.4), je nachdem $x^4 R(x)$ dort regulär ist, einen Pol höchstens zweiter oder einen Pol höherer Ordnung hat.

Einen gewissen Einblick in die hier vorliegenden Verhältnisse erhält man aus einem Grenzübergang, der als *Konfluenz* — besonders im Zusammenhang mit der hypergeometrischen Differentialgleichung — bekannt ist, und den wir hier kurz skizzieren wollen.

Es habe $R(x)$ in der Umgebung von x_0 einen Pol n-ter Ordnung $(n>2)$, es sei also

$$R(x) = \frac{R^*(x)}{(x-x_0)^n},$$

wo $R^*(x)$ in der Umgebung von x_0 regulär ist. Dann läßt sich $R(x)$ als Grenzwert

$$R(x) = \lim_{\varepsilon_\varkappa \to 0} R_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x) = \lim_{\varepsilon_\varkappa \to 0} \frac{R^*(x)}{\prod_{\varkappa=1}^{n} (x - x_0 - \varepsilon_\varkappa)}$$

auffassen, wobei der Grenzübergang so durchzuführen ist, daß $R_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)$ in einer Umgebung von x_0 keine Pole höherer als zweiter Ordnung erhält. Bei geeigneter Normierung der Lösungen $y_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)$ von

$$y''_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} + \tfrac{1}{2} R_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)\, y_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} = 0 \tag{1.6}$$

streben auch die $y_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)$ mit $\varepsilon_\varkappa \to 0$ gegen die Lösung von (1.4). Die Quotienten $\eta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)$ zweier linear unabhängiger Lösungen von (1.6) bilden die obere Halbebene auf eine Schar von Polygonen ab, die dann mit $\varepsilon_\varkappa \to 0$ gegen das gesuchte Polygon konvergieren. Da Differentialgleichung (1.6) nach Voraussetzung in der Umgebung von x_0 nur Stellen der Bestimmtheit hat, wird diese Umgebung durch $\eta_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)$ auf Teilstücke der betreffenden Polygone abgebildet, die dort eine gewisse feste Anzahl gewöhnlicher Ecken besitzen. Mit $\varepsilon_\varkappa \to 0$ wachsen die zugehörigen Winkel im allgemeinen über alle Grenzen, so daß diese Ecken in der Grenze in logarithmische Windungspunkte übergehen. Wir werden diese Verhältnisse weiter unten noch im einzelnen — auch quantitativ — zu studieren haben.

1.5. Über das Verhalten der Lösungen $y(x)$ bzw. von $\eta(x)$ *im großen* läßt sich zunächst nur aussagen, daß sie bei geschlossenen Umläufen in der x-Ebene linear transformiert werden. Irgendein Paar von linear unabhängigen Lösungen y_1, y_2 von (1.4) geht bei analytischer Fortsetzung längs einer geschlossenen Kurve in ein anderes Paar $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ über, das mit dem ersteren linear zusammenhängt:

$$\begin{cases} \tilde{y}_1 = a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \\ \tilde{y}_2 = a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2. \end{cases} \tag{1.7}$$

Hieraus ergibt sich die Existenz *multiplikativer Lösungen*, die bei geschlossenem Umlauf einen konstanten Faktor annehmen:

$$\begin{cases} \tilde{y}^{(1)} = k_1\, y^{(1)} \\ \tilde{y}^{(2)} = k_2\, y^{(2)} \end{cases} \text{ für } k_1 \neq k_2 \qquad \begin{cases} \tilde{y}^{(1)} = k\, y^{(1)} \\ y^{(2)} = C\, y^{(1)} + k\, y^{(2)} \end{cases} \text{ für } k_1 = k_2 = k. \tag{1.8}$$

Aus der Betrachtung der WRONSKIschen Determinante

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1',$$

die bei einer Differentialgleichung des Typus (1.4) gleich einer Konstanten ist, folgt, daß die Determinante der Umlaufssubstitutionen (1.7) und (1.8)

$$\mathrm{Det}\,|a_{ik}| = k_1 k_2 = 1 \qquad \text{ist.}$$

Dies hat die Existenz gewisser LAURENT-Entwicklungen in jedem von Singularitäten freien Kreisring in der x-Ebene zur Folge. Die in diesem Kreisring multiplikativen Lösungen lassen sich — entsprechend den kanonischen Lösungen (1.5) — in der Form schreiben:

$$\text{(1.9)} \qquad \begin{cases} y^{(1)} = (x - x_0)^{\frac{1+\delta}{2}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu \\ y^{(2)} = (x - x_0)^{\frac{1-\delta}{2}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu (x - x_0)^\nu \end{cases}$$

für unganze δ, und

$$y^{(2)} = C \log (x - x_0)\, y^{(1)} + (x - x_0)^{\frac{1-\delta}{2}} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} b_\nu (x - x_0)^\nu$$

für ganze δ.

1.6. Die Größe δ, die hier nur mod 2 bestimmt ist, läßt sich in diesem Fall nicht mehr algebraisch aus den Koeffizienten der Differentialgleichung (1.4) ermitteln. Zu ihrer Bestimmung wird die Differentialgleichung integriert und ein beliebiges Paar linear unabhängiger Lösungen $y_{1,2}$ samt ihren Ableitungen im Kreisring einmal herum analytisch fortgesetzt. Daraus lassen sich die Substitutionskoeffizienten a_{ik} von (1.7) berechnen, woraus sich die $k_{1,2}$ als Eigenwerte der Matrix (a_{ik}) ergeben. Insbesondere ist dann

$$\text{(1.10)} \qquad k_1 + k_2 = -2\cos\pi\delta = a_{11} + a_{22},$$

oder in den $y_{1,2}$ ausgedrückt:

$$\text{(1.11)} \qquad -2\cos\pi\delta = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \left(\begin{vmatrix} y_1 & \tilde{y}_2 \\ y_1' & \tilde{y}_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & y_2 \\ \tilde{y}_1' & y_2' \end{vmatrix} \right).$$

Wie in (1.5) hat auch in (1.9) die Größe δ [5]) für die konforme Abbildung durch $\eta(x)$ die Bedeutung eines Winkelmaßes. Die Darstellung (1.9) gilt in einem Ringgebiet, das gewisse Singularitäten der Differentialgleichung (1.4) umschließt. Diese Singularitäten liegen auf der reellen Achse, so daß das Ringgebiet zwei Stücke der reellen Achse herausschneidet. Diese Stücke gehen bei der konformen Abbildung durch $\eta(x)$ in Kreisbögen über, die miteinander einen Winkel der Größe $\delta\pi$ einschließen, wiederum in den Maßen der nichteuklidischen Geometrie gemessen. Dies ergibt sich als Folge des SCHWARZschen Spiegelungsprinzips.

[5]) Es läßt sich zeigen, daß — ebenso wie in den Entwicklungen (1.5) — die Größe δ reell oder rein imaginär sein muß.

1.7. Alle über diese allgemeinen Betrachtungen hinausgehenden Ergebnisse in der Theorie der Polygonabbildungen erfordern *die wirkliche Durchführung der Integration* der Differentialgleichung (1.4). Dabei wird es weniger auf die Gewinnung einzelner *numerischer Werte* als auf die Untersuchung der *Abhängigkeit der Lösungen von den Koeffizienten* der Differentialgleichung ankommen. Für diese Untersuchungen sind die üblichen numerischen Methoden wenig geeignet. Wir wenden daher hier die *asymptotischen Abschätzungen* der Lösungen von Differentialgleichungen bei großen Werten eines Parameters an, wie sie — ausgehend von Ansätzen von J. LIOUVILLE und J. HORN[6]) in neuerer Zeit vor allem von R. E. LANGER in verschiedenen Arbeiten[7]) durchgeführt worden sind. Die Grundzüge dieses Verfahrens sollen im folgenden entwickelt werden.

§ 2. Die asymptotische Integration.

2.1. Wir schreiben Differentialgleichung (1.4) in der Form:

$$\frac{y''}{y} = r(x) + \varrho^2 q(x). \tag{2.1}$$

Nach bekannten Sätzen über die Abhängigkeit der Lösungen von den Parametern der Differentialgleichung[8]) sind bei geeigneter Normierung die Lösungen $y(\varrho^2, x)$ von (2.1) *ganze* und im allgemeinen *transzendente Funktionen in* ϱ^2 *von der Ordnung* $\leqq \frac{1}{2}$[9]). Die Lösungen von (2.1) lassen sich also an jeder Stelle ϱ_0^2 in beständig konvergente Potenzreihen entwickeln

$$y(\varrho^2, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\varrho^2 - \varrho_0^2)^\nu \, y_\nu(x), \tag{2.2}$$

deren Koeffizienten sich ohne prinzipielle Schwierigkeiten rekursiv aus (2.1) bestimmen. Wesentliche Einblicke in die Struktur der zu untersuchenden *Abhängigkeit der Lösungen von* ϱ^2 gestatten solche Entwicklungen nicht. Erfordert wird hier vielmehr die Untersuchung der Abhängigkeit von ϱ^2 *„im großen"*, also in unserem Falle die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens für $\varrho^2 \to \infty$; eine solche Untersuchung soll im folgenden durchgeführt werden. Da uns hier nur Differentialgleichungen mit reellen Koeffizienten interessieren, können wir ϱ^2 von vornherein als *positiv reell* voraussetzen. Die Ausdehnung auf komplexe Parameter macht im übrigen keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten.

2.2. Über die Funktionen $r(x)$ und $q(x)$ sei Folgendes vorausgesetzt:

1. *$r(x)$ und $q(x)$ sind reelle rationale Funktionen.*

2. *$r(x)$ hat im Endlichen*[10]) *nur Pole höchstens zweiter Ordnung. Ist überdies x_0 Stelle der Bestimmtheit von* (2.1), *so ist*

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 r(x) < 0.$$

---

[6]) HORN [2].

[7]) LANGER [4], [5], [6], [8].

[8]) BIEBERBACH [1], S. 12.

[9]) BIEBERBACH [1], S. 293.

[10]) Für $x = \infty$ gelten die Bemerkungen in Fußnote 5 sinngemäß, d.h. es wird dort das Verhalten von $x^4 r(x)$ bzw. $x^4 q(x)$ betrachtet.

3. *Hat $\varphi(x)$ an der Stelle der Bestimmtheit x_0*[10]) *einen Pol zweiter Ordnung, so sei*

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 r(x) = -\tfrac{1}{4}.$$

Es ist dann

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \varrho^2 \varphi(x) = \frac{\delta^2}{4},$$

wo δ der zu dieser Stelle gehörige charakteristische Exponent ist.

2.3. Auf die Differentialgleichung (2.1) üben wir die LIOUVILLE-Transformation aus:

$$\xi(x) = \varrho \int_{x_0}^{x} \sqrt{\varphi(x)}\, dx, \qquad u(\xi) = \sqrt[4]{\varphi(x)}\, y(x). \tag{2.3}$$

Die Differentialgleichung (1.4) geht dann über in:

$$\frac{u''}{u} = 1 + \frac{r(x) + \frac{1}{2}[\xi]_x}{\varrho^2 \varphi(x)} = 1 + \frac{Q(\xi)}{\varrho^2}. \tag{2.4}$$

Nach Voraussetzung ist $\varphi(x)$ eine *reelle rationale Funktion*. Die obere x-Halbebene wird daher durch $\xi(x)$ als ein SCHWARZ-CHRISTOFFELsches Integral auf ein *Geradenpolygon* abgebildet. Dieses hat die besondere Eigenschaft, daß alle seine Ränder *Parallelen zur reellen oder imaginären ξ-Achse* sind. Die Winkel in den Ecken sind dann alle Vielfache von $\pi/2$. Falls $\varphi(x)$ *Nullstellen* in der oberen Halbebene besitzt, so daß $\xi(x)$ dort *nicht mehr eindeutig* ist, trennen wir durch eine geeignete Zerschneidung einen in der oberen Halbebene eindeutigen Zweig von $\xi(x)$ ab, wobei wir die Schnitte so legen, daß ihre Ufer durch $\xi(x)$ ebenfalls auf *Parallelen zur reellen oder imaginären ξ-Achse* abgebildet werden. Es wird dann auch in diesem Fall die obere Halbebene einschließlich der Schnitte durch $\xi(x)$ auf ein Polygon mit der oben geschilderten Eigenschaft abgebildet. Solche Polygone wollen wir im folgenden als *ξ-Polygone* bezeichnen.

2.4. Ist $Q(\xi)$ in einem Gebiet beschränkt, so geht Differentialgleichung (2.4) mit $\varrho \to \infty$ dort über in

$$\frac{u''}{u} = 1$$

und die Lösungen $u(\xi)$ gehen (in einer noch näher zu erläuternden Weise) dort gegen die *Exponentialfunktion*. Eine eingehendere Untersuchung erfordern dagegen die *Unendlichkeitsstellen* von

$$Q(\xi) = \frac{r(x) + \frac{1}{2}[\xi]_x}{\varphi(x)}. \tag{2.5}$$

$[\xi]_x$ hat als SCHWARZsche Ableitung eines SCHWARZ-CHRISTOFFELschen Integrals Pole höchstens zweiter Ordnung in x, und zwar genau an den Nullstellen und Polen von $\varphi(x)$. Nach Voraussetzung hat auch $r(x)$ Pole höchstens zweiter Ordnung, so daß im Zähler auf der rechten Seite von (2.5) eine rationale Funktion in x mit Polen höchstens zweiter Ordnung steht.

Es sei jetzt k die *Ordnung* von $\varphi(x)$ an einer Stelle $x = x_0$, d.h. für $\varphi(x)$ gelte in der Umgebung von x_0 die Entwicklung:

$$\varphi(x) = c^2(x - x_0)^k \left(1 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots\right).$$

Wir müssen dann unterscheiden, ob $k \gtreqless -2$ ist[10]).

k > −2.

Das Integral $\xi(x)$ bleibt in der Umgebung von x_0 *endlich*; es sei $\xi(x_0) = \xi_0$. Dann gilt

$$\xi - \xi_0 = \frac{2\varrho c}{k+2}(x - x_0)^{\frac{k+2}{2}}\left(1 + b_1(x - x_0) + \cdots\right) \tag{2.6}$$

und umgekehrt

$$x - x_0 = \left(\frac{k+2}{2\varrho c}(\xi - \xi_0)\right)^{\frac{2}{k+2}} + c_1\left(\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right)^{\frac{4}{k+2}} + \cdots. \tag{2.7}$$

Es habe zunächst $r(x)$ bei x_0 einen Pol. Dann ist x_0 *Stelle der Bestimmtheit* von (2.1) und es gilt

$$\lim_{x \to x_0}(x - x_0)^2 r(x) = -\frac{1 - \delta^2}{4} < 0, \quad \text{d.h. } \delta^2 < 1.$$

Ferner ist

$$\lim_{x \to x_0}(x - x_0)^2 [\xi]_x = \frac{1 - \left(\frac{k+2}{2}\right)^2}{2}.$$

Daraus ergibt sich die Entwicklung von $Q(\xi)$ in der Umgebung von ξ_0 zu:

$$\left\{ Q(\xi) = -\frac{1 - \left(\frac{2\delta}{k+2}\right)^2}{4}\left(\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right)^{-2} + d_1\left(\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right)^{-\frac{2k+2}{k+2}} + \right. \tag{2.8}$$

$$\left. + d_2\left(\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right)^{-\frac{2k}{k+2}} + \cdots; \right.$$

deren Koeffizienten d_ν sind unbhängig von ϱ.

Ist $r(x)$ *regulär* an der Stelle x_0, so verschwindet, wie man durch elementare Rechnung zeigen kann, der Koeffizient d_1, so daß in diesem Falle gilt:

$$Q(\xi) = -\frac{1 - \left(\frac{2}{k+2}\right)^2}{4}\left(\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right)^{-2} + d_2\left(\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right)^{-\frac{2k}{k+2}} + \cdots. \tag{2.9}$$

k = −2.

An der Stelle x_0 wird $\xi(x)$ *logarithmisch unendlich*. Es gilt:

$$\xi = \pm\frac{\delta}{2}\log(x - x_0) + b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots. \tag{2.10}$$

Da $\lim_{x \to x_0}(x - x_0)^2 \frac{1}{2}[\xi]_x = \frac{1}{4}$ ist, verschwindet der *Koeffizient* (-2)-ter *Ordnung* in der Entwicklung des Zählers von (2.5) an der Stelle x_0, der gesamte Ausdruck auf der rechten Seite von (2.5) hat dort also eine *Nullstelle*. Für $Q(\xi)$ als Funktion von ξ ergibt sich daraus das folgende Verhalten: Wenn wir uns in der x-Ebene auf irgendeinem Wege der Stelle x_0 nähern, so entspricht dem

in der ξ-Ebene ein Weg, der nach $\xi = \infty$ führt. Auf solchen Wegen strebt dann $Q(\xi) \to 0$, und zwar so stark, wie die Exponentialfunktion in der linken Halbebene, also insbesondere stärker als jede noch so große negative Potenz von ξ.

***k* < −2.**

Auch hier wird $\xi(x)$ mit $x \to x_0$ *unendlich*, und zwar gilt:

$$\xi = \varrho (x - x_0)^{-\frac{k+2}{2}} (b_0 + b_1 (x - x_0) + \cdots) \tag{2.11}$$

und umgekehrt:

$$x - x_0 = c_0 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{\frac{2}{k+2}} + c_1 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{\frac{4}{k+2}} . \tag{2.12}$$

Mit $x \to x_0$ verschwindet die rechte Seite von (2.5) mindestens wie $(x - x_0)^{-k-2}$, $Q(\xi)$ also mindestens wie ξ^{-2}. Genauer gilt die folgende Entwicklung in ξ und ϱ:

$$Q(\xi) = d_0 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{-2} + d_1 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{-\frac{2k+2}{k+2}} + d_2 \left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^{-\frac{2k}{k+2}} + \cdots \tag{2.13}$$

für alle Wege in der ξ-Ebene, die einer Annäherung an die Stelle x_0 in der x-Ebene entsprechen.

Zusammenfassend können wir Folgendes sagen: *$Q(\xi)$ hat auf dem Rand*[11]) *des ξ-Polygons endlich viele singuläre Stellen, an denen es wie $(\xi - \xi_0)^{-2}$ unendlich wird, wenn ξ_0 die betreffende singuläre Stelle ist. In denjenigen Teilen des ξ-Polygons, die nach $\xi = \infty$ reichen, verschwindet $Q(\xi)$ mindestens wie ξ^{-2}.*

2.5. Wir stellen nun der Differentialgleichung (2.4) eine *Hilfs*-Differentialgleichung vom gleichen Typus mit bereits bekannten Lösungen gegenüber:

$$\frac{v''}{v} = 1 + \frac{P(\xi)}{\varrho^2} . \tag{2.14}$$

Diese soll mit Differentialgleichung (2.4) auf einem *Teilbereich* des ξ-Polygons näherungsweise übereinstimmen, in der Weise, daß die Differenz

$$q(\xi) = Q(\xi) - P(\xi)$$

klein wird in folgendem Sinne:

1. $|q(\xi)| = O(1)$, *wo* $|Q(\xi)| = O(1)$ *ist.*
2. *In der Umgebung einer singulären Stelle ξ_0 von $Q(\xi)$ sei*

$$|q(\xi)| = O\left(\left|\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right|^{-\frac{2k+2}{k+2}}\right)$$

oder

$$|q(\xi)| = O\left(\left|\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right|^{-\frac{2k}{k+2}}\right),$$

je nachdem dort (2.8) *oder* (2.9) *gilt.*

3. $|q(\xi)| = O\left(\left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{-2}\right)$, *für* $\xi \to \infty$, $\varrho \to \infty$.

[11]) Nach der oben gegebenen Definition des ξ-Polygons liegen die Singularitäten von $Q(\xi)$ sämtlich auf seinem Rand.

Darüber hinaus soll $P(\xi)$ natürlich auf dem betrachteten Bereich *regulär analytisch* sein, eventuell mit Ausnahme von endlich vielen Polstellen und algebraischen Verzweigungen.

2.6. Wir schreiben die Differentialgleichung (2.4) in der Form:

$$\frac{u''}{u} = 1 + \frac{P(\xi)}{\varrho^2} + \frac{q(\xi)}{\varrho^2}. \tag{2.15}$$

Auf Grund von (2.14) ist diese Differentialgleichung äquivalent mit der folgenden *Integralgleichung*:

$$u(\xi) = v_1(\xi) + \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{v_1(\zeta)\, v_2(\xi) - v_2(\zeta)\, v_1(\xi)}{\varrho^2 W(v_1, v_2)}\, q(\zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.16}$$

v_1, v_2 sind hier ein — zunächst beliebiges — Paar von linear unabhängigen Lösungen der Hilfsdifferentialgleichung (2.14). Die Lösung der Integralgleichung (2.16) ist dann gleich derjenigen Lösung der Differentialgleichung (2.15), die an der Stelle ξ_1 samt ihrer Ableitung mit $v_1(\xi)$ übereinstimmt und von dort aus längs des in (2.16) zugrunde gelegten Integrationsweges nach ξ analytisch fortgesetzt wurde. Sofern das Integral auf der rechten Seite von (2.16) als *klein* vorausgesetzt werden kann, haben wir damit eine *Abschätzung* von $u(\xi)$ durch die bekannte Funktion $v_1(\xi)$.

Wir formen die Integralgleichung (2.16) um, indem wir setzen:

$$U(\xi) = \frac{u(\xi)}{v_1(\xi)}, \qquad H(\xi) = \frac{v_2(\xi)}{v_1(\xi)}. \tag{2.17}$$

Dann ist $U(\xi)$ Lösung der folgenden Integralgleichung:

$$U(\xi) = 1 + \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{H(\xi) - H(\zeta)}{\varrho^2 W(v_1, v_2)}\, v_1^2(\zeta)\, q(\zeta)\, U(\zeta)\, d\zeta. \tag{2.18}$$

2.7. Diese Integralgleichung lösen wir mit den Methoden der *sukzessiven Approximation*. Sei

$$K(\xi, \zeta) = \frac{H(\xi) - H(\zeta)}{\varrho^2 W(v_1, v_2)}\, v_1^2(\zeta)\, q(\zeta).$$

Wir bilden

$$\begin{cases} U_0(\xi) & = 1, \\ U_{\nu+1}(\xi) & = \int_{\xi_1}^{\xi} K(\xi, \zeta)\, U_\nu(\zeta)\, d\zeta. \end{cases} \tag{2.19}$$

Dann ist

$$U(\xi) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu(\xi) \tag{2.20}$$

eine Lösung von (2.18) sofern die Summe auf der rechten Seite von (2.20) *gleichmäßig konvergiert*. Sei nun $k(\zeta)$ eine *positiv reelle* und *stückweise stetige Funktion*, derart, daß für alle ξ und ζ auf dem Integrationsweg gilt:

$$|K(\xi, \zeta)| \leq k(\zeta). \tag{2.21}$$

Dann konvergiert die Summe in (2.20) gleichmäßig für alle ξ, für die das Integral

$$I(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi} k(\zeta)\,|d\zeta| \tag{2.22}$$

beschränkt bleibt. Es ist nämlich:

$$|U_1(\xi)| \leq I(\xi)$$

$$|U_2(\xi)| \leq \int_{\xi_1}^{\xi} I(\zeta)\,k(\zeta)\,|d\zeta| = \frac{I^2(\xi)}{2}$$

$$|U_\nu(\xi)| \leq \int_{\xi_1}^{\xi} \frac{I^{\nu-1}(\zeta)}{(\nu-1)!}\,k(\zeta)\,|d\zeta| = \frac{I^\nu(\xi)}{\nu!}\,.$$

Daraus folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu(\xi) \ll \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{I_\nu(\xi)}{\nu!} = e^{I(\xi)} - 1\,. \tag{2.23}$$

Insbesondere geht $U(\xi) \to 1$, d.h. $u(\xi) \to v_1(\xi)$, wenn $I(\xi) \to 0$ geht für $\varrho \to \infty$. Es gilt also eine geeignete Abschätzung für $K(\xi, \zeta)$ zu finden.

2.8. Als Erstes schätzen wir den von den *Hilfsfunktionen* $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$ *herrührenden Anteil* in $K(\xi, \zeta)$ ab:

$$\frac{H(\xi) - H(\zeta)}{W(v_1, v_2)}\,v_1^2(\zeta)\,. \tag{2.24}$$

In diesem Ausdruck tritt neben der Funktion $v_1(\xi)$, durch die $u(\xi)$ abgeschätzt wird, noch die dazu linear unabhängige Lösung $v_2(\xi)$ von (2.14) auf. Das Verhalten von $u(\xi)$ wird daher nicht allein durch die *partikuläre Lösung* $v_1(\xi)$, sondern durch die *Gesamtheit* der Lösungen von (2.14) bestimmt. Hierin liegt eine charakteristische Schwierigkeit dieses Abschätzungsverfahrens; es ist nämlich nicht möglich, sinnvolle Abschätzungen für ganz beliebige Anfangsbedingungen und Integrationswege zu erhalten. G. G. Stokes hat als erster diese Schwierigkeit bei der asymptotischen Abschätzung der Bessel-Funktionen bemerkt und richtig gedeutet. Man nennt daher diese Erscheinung nach ihm das Stokessche Phänomen[12]).

In unserem Fall erhalten die Bedingungen, denen der Integrationsweg und die Hilfsfunktionen $v_{1,2}$ genügen müssen, die folgende Form: Es sei $t(\xi)$ die *Schwankung des Realteils* von ξ auf dem *Integrationsweg*

$$t(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi} |d\,\Re(\zeta)|\,. \tag{2.25}$$

Dann muß für beliebig große, positiv reelle ϱ und alle ξ auf dem Integrationsweg die folgende Abschätzung der Hilfsfunktionen $v_1(\xi)$, $v_2(\xi)$ möglich sein:

$$\begin{cases} |v_1(\xi)| \leq V \exp\left(\varrho\, t_0 + t(\xi)\right) \\ |v_2(\xi)| \leq V \exp -\left(\varrho\, t_0 + t(\xi)\right), \end{cases} \tag{2.26}$$

mit einer von ξ und ϱ unabhängigen Konstante V.

[12]) Langer [3].

Einer entsprechenden Bedingung soll auch $H(\xi)$ genügen; es sei[13]:

$$|H(\xi)| \leq H \exp -2\left(\varrho\, t_0 + t(\xi)\right). \tag{2.27}$$

Weiterhin sei die WRONSKIsche Determinante $W(v_1, v_2)$ eine von ϱ — und natürlich von ξ — unabhängige Konstante. Unter diesen Voraussetzungen ist die Größe (2.24) auf dem ganzen Integrationsweg und für alle ϱ beschränkt. Denn es ist

$$|H(\zeta)\, v_1^2(\zeta)| = |v_1(\zeta)\, v_2(\zeta)| \leq V^2$$

und

$$|H(\xi)\, v_1^2(\zeta)| \leq H V^2 \exp 2\left(t(\zeta) - t(\xi)\right) \leq H V^2,$$

da auf dem Integrationsweg stets $t(\zeta) \leq t(\xi)$ ist.

2.9. Bei der *Abschätzung von* $q(\xi)$ müssen wir berücksichtigen, daß mit wachsendem ϱ sich nicht nur $K(\xi, \zeta)$ sondern auch das ξ-Polygon selbst verändert, und zwar im Sinne einer *ähnlichen Vergrößerung* mit dem Faktor ϱ. Dieselbe Vergrößerung erfährt ein *Integrationsweg* in der ξ-Ebene, wenn in der x-Ebene ein fester Weg vorgegeben war. Da wir letzten Endes die Abhängigkeit der Lösungen von x und nicht von ξ studieren wollen, und zudem auch $Q(\xi)$ nur als Funktion von x, nicht aber als Funktion von ξ unabhängig von ϱ ist, werden wir weiterhin solche Wege und Bereiche zugrunde zu legen haben, die in der x-Ebene, nicht aber in der ξ-Ebene fest bleiben. Entsprechend den vorhin über $q(\xi)$ gemachten Voraussetzungen müssen wir gesondert betrachten:

1. *Bereiche auf denen* $q(\xi)$ *beschränkt ist.*

2. *Umgebungen der singulären Stellen von* $Q(\xi)$. *Sei* ξ_0 *eine solche Stelle, so betrachten wir die Umgebung* $|\xi - \xi_0| < \varrho\, r$, *wo* r *von* ϱ *unabhängig sein soll.*

3. *Die Umgebung von* $\xi = \infty$; *wir betrachten eine Umgebung* $|\xi| > \varrho R$, *wo* R *ebenfalls von* ϱ *unabhängig sein soll.*

2.10. Auf Bereichen, in denen $q(\xi)$ *beschränkt* ist, können wir $K(\xi, \zeta)$ abschätzen durch:

$$k(\zeta) = \frac{K_1}{\varrho^2}. \tag{2.28}$$

Die Teile des Integrationswegs, die auf diesen Bereichen liegen, haben eine endliche Länge, die proportional mit ϱ wächst. Es ist daher das Integral über diese Teile des Integrationswegs[14])

$$\int^{1} k(\zeta)\, |d\zeta| = O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \tag{2.29}$$

[13]) Diese Bedingung läuft im wesentlichen darauf hinaus, daß $|v_1(\xi)|$ auch nach unten beschränkt ist. Im übrigen ist sie nicht von so grundsätzlicher Bedeutung wie (2.26), sondern soll nur unnötige Komplikationen vermeiden, die bei der Abschätzung in der Umgebung der Nullstellen von $v_1(\xi)$ auftreten.

[14]) Die den Integralen im folgenden beigefügten Ziffern beziehen sich auf die Fallunterscheidungen im vorigen Abschnitt **2.9.** Sie sollen zum Ausdruck bringen, daß jeweils nur über solche Teile des Integrationswegs integriert werden soll, auf die der unter der betreffenden Ziffer genannte Fall zutrifft.

2.11. Für die Umgebung einer *singulären Stelle* ξ_0 hatten wir vorausgesetzt, daß $P(\xi)$ dort nur algebraisch verzweigt ist und wie $(\xi-\xi_0)^{-2}$ unendlich wird. Sei also

$$\lim_{\xi\to\xi_0}\left(\frac{\xi-\xi_0}{\varrho^2}\right)^2 P(\xi) = -\frac{1-m^2}{4}, \tag{2.30}$$

mit $\Re(m)\geqq 0$, $m^2\leqq 1$ [15]). Dann ist, gemessen in der *Ortsuniformisierenden* der algebraischen Verzweigung, die Stelle ξ_0 eine *außerwesentliche Singularität* von (2.14), d.h. die Lösungen von (2.14) lassen sich dort in Reihen vom Typus (1.5) entwickeln mit der Ortsuniformisierenden als Entwicklungsgröße. Wegen (2.30) haben diese kanonischen Lösungen m als charakteristischen Exponenten; sie lassen sich in einer festen, von ϱ unabhängigen Umgebung, sagen wir für $|\xi-\xi_0|<r_1<\varrho\, r$, wie folgt abschätzen:

$$v^{(1)} = (\xi-\xi_0)^{\frac{1+m}{2}}\big(1+o(1)\big), \tag{2.31}$$

$$v^{(2)} = (\xi-\xi_0)^{\frac{1-m}{2}}\big(1+o(1)\big),$$

oder für $m=0$

$$v^{(2)} = (\xi-\xi_0)^{\frac{1}{2}}\log(\xi-\xi_0)\big(1+o(1)\big).$$

Zusammen mit (2.26) folgt daraus für $|\xi-\xi_0|<r_1<\varrho\, r$

$$v_1 = \exp\big(\varrho\, t_0 + t(\xi_0)\big)\,(\xi-\xi_0)^{\frac{1-m}{2}}\cdot O(1), \tag{2.32}$$

oder für $m=0$

$$v_1 = \exp\big(\varrho\, t_0 + t(\xi_0)\big)\,(\xi-\xi_0)^{\frac{1}{2}}\log(\xi-\xi_0)\,O(1).$$

Nach Voraussetzung ist für $|\xi-\xi_0|<\varrho\, r$

$$|q(\xi)| = \left|\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right|^{-\frac{2k}{k+2}} O(1)$$

oder

$$|q(\xi)| = \left|\frac{\xi-\xi_0}{\varrho}\right|^{-\frac{2k+2}{k+2}} O(1),$$

je nachdem $r(x)$ in x_0 regulär ist oder nicht. Im ersten Fall ist

$$m = \frac{2}{k+2}$$

und wir können $K(\xi,\zeta)$ abschätzen durch:

$$k(\zeta) = K_2\,|\zeta-\xi_0|^{-\frac{k}{k+2}}\,\varrho^{-\frac{4}{k+2}} \quad \text{für} \quad |\zeta-\xi_0|<r_1<\varrho\, r, \tag{2.33}$$

bzw.

$$k(\zeta) = K_2\,|\zeta-\xi_0|^{-\frac{2k}{k+2}}\,\varrho^{-\frac{4}{k+2}} \quad \text{für} \quad r_1\leqq|\zeta-\xi_0|<\varrho\, r.$$

---

[15]) $m^2\leqq 1$ — in Verbindung mit $\delta^2<1$ — garantiert die Beschränktheit von $v_{1,2}(\xi)$ in der Umgebung von ξ_0. Beide Bedingungen könnten durch eine geeignete Modifikation des Abschätzungsverfahrens umgangen werden. Siehe hierzu STALLMANN [10], S. 25f. Im übrigen lassen sich diese Bedingungen durch geeignete Wahl von $r(x)$ und $\varphi(x)$ stets erfüllen.

Im zweiten Falle ist $m=\frac{2\delta}{k+2}$, und es ist für $|\zeta-\xi_0|<r_1<\varrho r$

$$(2.34)\quad \begin{cases} k(\zeta)=K_2|\zeta-\xi_0|^{-\frac{k+2\delta}{k+2}}\varrho^{-\frac{2}{k+2}} & \text{bei} \quad \delta\neq 0 \\ k(\zeta)=K_2|\zeta-\xi_0|^{-\frac{k}{k+2}}\log^2|\zeta-\xi_0|\,\varrho^{-\frac{2}{k+2}} & \text{bei} \quad \delta=0; \end{cases}$$

für $r_1\leq|\zeta-\xi_0|<\varrho r$ ist

$$k(\zeta)=K_2|\zeta-\xi_0|^{-\frac{2k+2}{k+2}}\varrho^{-\frac{2}{k+2}}.$$

Als Integrationswege in der Umgebung $|\xi-\xi_0|<\varrho r$ lassen wir die beiden folgenden Möglichkeiten zu:

2a. *Geraden durch* ξ_0.

2b. *Kreise um* ξ_0.

Auf den Wegen 2a und mit Abschätzung (2.33) gilt:

$$(2.35)\quad \int^{2a} k(\zeta)\,|d\zeta|\leq 2K_2\varrho^{-\frac{4}{k+2}}\left(\int_0^{r_1}\tau^{-\frac{k}{k+2}}\,d\tau+\int_{r_1}^{\varrho r}\tau^{-\frac{2k}{k+2}}\,d\tau\right).$$

Das erste Integral auf der rechten Seite von (2.35) konvergiert und ist unabhängig von ϱ beschränkt, das zweite ist an der unteren Grenze ebenfalls beschränkt und verhält sich an der oberen Grenze wie

$$\varrho^{-\frac{k-2}{k+2}} \quad \text{bzw. wie} \quad \log\varrho, \quad \text{wenn} \quad k=2 \quad \text{ist.}$$

Es ist also

$$(2.36)\quad \begin{cases} \int^{2a} k(\zeta)\,|d\zeta| = O\left(\varrho^{-\frac{4}{k+2}}\right) & \text{für} \quad k>2 \\ = O\left(\frac{\log\varrho}{\varrho}\right) & \text{für} \quad k=2 \\ = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) & \text{für} \quad k<2. \end{cases}$$

Gilt die Abschätzung (2.34), dann wird

$$(2.37)\quad \int^{2a} k(\zeta)\,|d\zeta|\leq 2K_2\varrho^{-\frac{2}{k+2}}\left(\int_0^{r_1}\tau^{-\frac{k+2\delta}{k+2}}\,d\tau+\int_{r_1}^{\varrho r}\tau^{-\frac{2k+2}{k+2}}\,d\tau\right).$$

Da $\delta<1$ vorausgesetzt wurde[16]), konvergiert wieder das erste Integral auf der rechten Seite von (2.37) und ist — ebenso wie das zweite an der unteren Grenze — unabhängig von ϱ beschränkt. An der oberen Grenze verhält sich das zweite Integral wie $\varrho^{-\frac{k}{k+2}}$ oder wie $\log\varrho$, wenn $k=0$ ist. Im ganzen

[16]) Falls $\delta=0$ ist, tritt im ersten Integral auf der rechten Seite von (2.37) noch ein logarithmischer Faktor hinzu. Die Konvergenz des Integrals wird dadurch nicht berührt. Entsprechendes gilt auch für (2.39).

verhält sich das Integral (2.37) wie:

$$(2.38)\qquad \begin{cases} \int^{2a} k(\zeta)\,|d\zeta| = O\left(\varrho^{-\frac{2}{k+2}}\right) & \text{für } k>0 \\ \qquad\qquad = O\left(\dfrac{\log\varrho}{\varrho}\right) & \text{für } k=0 \\ \qquad\qquad = O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right) & \text{für } k<0. \end{cases}$$

Als Integrationsweg 2b, d.h. Kreise um ξ_0 betrachten wir den Kreis $|\xi-\xi_0|=r_2$ mit dem beliebigen Radius r_2, der eine feste Zahl von n Malen durchlaufen werde. Die Abschätzungen (2.33), (2.34) haben alle die Form

$$k(\zeta) = K_2\,|\zeta-\xi_0|^{\alpha}\,\varrho^{\beta}.$$

Es ist also:

$$(2.39)\qquad \int^{2b} k(\zeta)\,|d\zeta| = 2\pi n K_2 r_2^{\alpha+1}\,\varrho^{\beta}\,^{16}).$$

Lassen wir $r_2\to 0$ gehen, so kommen wir in das Gebiet $|\xi-\xi_0|<r_1$. Dort ist $\alpha>-1$, und das Integral verhält sich dort wie $O(\varrho^{\beta})$. Lassen wir dagegen $r_2\to\varrho\,r$ gehen, so kommen wir in das Gebiet $r_1\leqq|\xi-\xi_0|<\varrho\,r$, und das Integral wird $O(\varrho^{\alpha+\beta+1})$, das ist aber $O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$. So ist also, unabhängig von dem speziell gewählten r_2

$$(2.40)\qquad \begin{cases} \int^{2b} k(\zeta)\,|d\zeta| = O\left(\varrho^{-\frac{4}{k+2}}\right)+O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right), & \text{falls (2.33) gilt, und} \\ \qquad\qquad = O\left(\varrho^{-\frac{2}{k+2}}\right)+O\left(\dfrac{1}{\varrho}\right), & \text{falls (2.34) gilt.} \end{cases}$$

2.12. *In der Umgebung von* $\xi=\infty$, d.h. für $|\xi|>\varrho R$ wird

$$q(\xi) = \left|\frac{\xi}{\varrho}\right|^{-2} O(1)$$

und wir können $K(\xi,\zeta)$ dort abschätzen durch

$$(2.41)\qquad k(\zeta) = K_3|\zeta|^{-2}.$$

Der Teil des Integrationswegs, der in diesem Gebiet liegt, läuft von einem Punkt mit $|\xi|=\varrho R$ aus bis höchstens gegen $\xi=\infty$. Wir dürfen annehmen, daß der Integrationsweg im wesentlichen geradlinig gegen $\xi=\infty$ verläuft. Dann gilt für diesen Teil des Integrationswegs:

$$(2.42)\qquad \int^{3} k(\zeta)\,|d\zeta| = O\left(\frac{1}{\varrho}\right).$$

2.13. Fassen wir alle Teilintegrale zusammen, so können wir $I(\xi)$ abschätzen für $\varrho\to\infty$ durch

$$(2.43)\qquad I(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi} k(\zeta)\,|d\zeta| = O(\varrho^{\gamma}),$$

wo γ sich aus den Abschätzungen (2.29), (2.36), (2.38), (2.40) und (2.42) bestimmt. In jedem Falle ist $-1\leqq\gamma<0$.

Wegen (2.23) folgt hieraus

$$U(\xi) = 1 + O(\varrho^{\gamma}) \tag{2.44}$$

oder schließlich

$$u(\xi) = v_1(\xi)\,(1 + O(\varrho^{\gamma})). \tag{2.45}$$

Es läßt sich also — unter den gegebenen Einschränkungen — auf diese Weise das Verhalten von $u(\xi)$ für $\varrho \to \infty$ bestimmen. Im nächsten Kapitel wollen wir die Konsequenzen aufzeigen, die sich hieraus für die Theorie der Polygonabbildung ergeben.

§ 3. Untersuchung der Polygonabbildung mit Hilfe der asymptotischen Integration.

3.1. Wir untersuchen zunächst die Lösungen einer LAMÉschen Differentialgleichung, die wir — entsprechend (2.1) — in der Form schreiben:

$$\frac{y''}{y} = -\frac{3}{16}\sum_{\nu=1}^{3}\frac{1}{(x-e_\nu)^2} + \frac{(\frac{5}{4}+\delta^2)\,x}{4\prod_{\nu=1}^{3}(x-e_\nu)} + \frac{\varrho^2}{4\prod_{\nu=1}^{3}(x-e_\nu)}, \qquad 0 \le \delta^2 \le \tfrac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Um Anschluß sowohl an die WEIERSTRASSsche wie an die LEGENDREsche Theorie der elliptischen Funktionen zu gewinnen, setzen wir:

$$e_1 = \frac{2-k^2}{3}, \qquad e_2 = \frac{2k^2-1}{3}, \qquad e_3 = \frac{1+k^2}{3}. \qquad 0 \le k^2 \le 1. \tag{3.2}$$

Die LIOUVILLE-Transformation entspricht dann im wesentlichen der Einführung der WEIERSTRASSschen Normalform der LAMÉschen Differentialgleichung. Das elliptische Integral

$$\xi(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\varrho}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

hat die Perioden $2\varrho K$, $2i\varrho K'$, wo K, K' die zum Modul k^2 gehörigen vollständigen elliptischen Integrale in der LEGENDREschen Normalform sind. Die Umkehrung hiervon ist die zu diesen Perioden gehörige WEIERSTRASSsche $\wp$-Funktion:

$$x(\xi) = \wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K').$$

Mit

$$u(\xi) = \sqrt[4]{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}\; y(x)$$

geht Differentialgleichung (3.1) über in

$$\frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4}\wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K'). \tag{3.3}$$

Bei geeigneter Festsetzung des Vorzeichens der Wurzel wird die obere x-Halbebene durch $\xi(x)$ auf das Rechteck R

$$-\varrho K \le \Re(\xi) \le 0, \qquad 0 \le \Im(\xi) \le \varrho K'$$

abgebildet. An der Stelle $\xi = 0$ hat

$$Q(\xi) = -\varrho^2 \frac{1-(2\delta)^2}{4} \wp(\xi; 2\varrho K, 2i\varrho K')$$

einen Pol zweiter Ordnung. Außerhalb einer — mit ϱ *wachsenden* — Umgebung dieser Stelle — etwa für $|\xi| \geq \varrho r$ — ist $Q(\xi)$ in R unabhängig von ϱ beschränkt. In diesem Bereich ist die einfache Differentialgleichung

$$\frac{v''}{v} = 1 \tag{3.4}$$

mit den Lösungen $v_{1,2}(\xi) = e^{\pm\xi}$ als Hilfsdifferentialgleichung zulässig.

Sei zunächst $v_1(\xi) = e^{\xi}$, $v_2(\xi) = e^{-\xi}$. Dann muß wegen (2.26) $\Re(\xi)$ auf dem Integrationsweg eine monoton wachsende Funktion sein. Wählen wir den Anfangspunkt ξ_1 auf dem linken Rand des Rechtecks, so ist es leicht möglich, jeden Punkt des betrachteten Bereichs auf solchen Integrationswegen zu erreichen, die von ξ_1 ausgehend ganz im Innern des Bereichs liegen und auf denen $\Re(\xi)$ monoton wächst. Setzen wir umgekehrt $v_1(\xi) = e^{-\xi}$, $v_2(\xi) = e^{+\xi}$, so muß $\Re(\xi)$ auf dem Integrationsweg monoton fallen, und daher ξ_1 auf dem rechten Rand des Rechtecks — natürlich außerhalb von $|\xi| < \varrho r$ — liegen.

Unter diesen Voraussetzungen können wir die asymptotische Integration durchführen und erhalten für ein Paar von Lösungen der Differentialgleichung (3.3) die Abschätzung:

$$\begin{cases} u_1(\xi) = e^{\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \\ u_2(\xi) = e^{-\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \end{cases} \tag{3.5}$$

wobei für die Anfangspunkte $\xi_1^{(1)}$, $\xi_1^{(2)}$ auf dem linken bzw. rechten Rand des Rechtecks die Anfangsbedingungen gelten:

$$u_1(\xi_1^{(1)}) = e^{\xi_1^{(1)}}, \qquad u_2(\xi_1^{(2)}) = e^{-\xi_1^{(2)}}$$
$$u_1'(\xi_1^{(1)}) = e^{\xi_1^{(1)}}, \qquad u_2'(\xi_1^{(2)}) = -e^{-\xi_1^{(2)}}.$$

Die Abschätzung ist gültig im Bereich

$$-\varrho K \leq \Re(\xi) \leq 0, \qquad 0 \leq \Im(\xi) \leq \varrho K', \qquad |\xi| \geq \varrho r.$$

3.2. Wir bilden den Quotienten

$$\eta(\xi) = \frac{u_1(\xi)}{u_2(\xi)} = e^{2\xi}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \tag{3.6}$$

Für hinreichend große ϱ ist $\eta(\xi)$ sicher nicht konstant, $u_1(\xi)$, $u_2(\xi)$ also linear unabhängig. Es bildet dann $\eta(\xi)$ das Rechteck R auf ein *Kreisbogenviereck* mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, $\delta\pi$ ab, insbesondere also die Rechtecksseiten auf gewisse Kreisbogen- bzw. Geradenstücke. Wir wollen die *Rechtecksseiten* vom Nullpunkt ausgehend der Reihe nach mit a, b, c, d bezeichnen, die zugehörigen

Seiten des Kreisbogenvierecks mit a^*, b^*, c^*, d^* (s. Fig. 1). Die genaue Gestalt des Kreisbogenvierecks hängt noch von den Parametern k^2 und ϱ ab und soll jetzt näherungsweise bestimmt werden.

Wir gehen dazu aus von der Abschätzung (3.6); danach verhält sich $\eta(\xi)$ in R außerhalb von $|\xi| < \varrho r$ wie $e^{2\xi}$. Wir dürfen annehmen, daß die Seiten b und c des Rechtecks außerhalb von $|\xi| < \varrho r$ liegen, so daß (3.6) auf ihnen gilt. Durch $e^{2\xi}$ werden diese Seiten auf den Strahl $\arc \eta = 2\varrho K'$, $1 \leq |\eta| \leq e^{-2\varrho K}$ und den Kreis $|\eta| = e^{-2\varrho K}$, $0 \leq \arc \eta \leq 2\varrho K'$ abgebildet. In einer, durch den Faktor $\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)$ bestimmten *Umgebung dieser Kreise* müssen also die Viereckseiten b^* und c^* liegen, die hierdurch näherungsweise festgelegt sind.

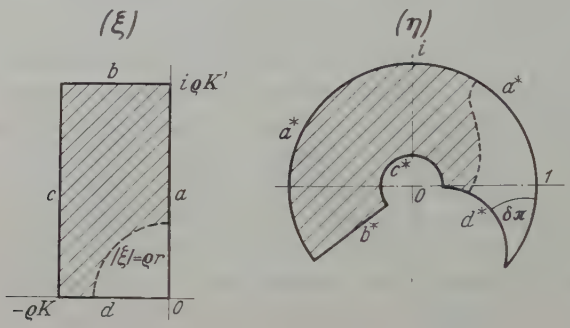

Fig. 1.

Nicht so einfach ist die Lage der Seiten a^* und d^* zu bestimmen, weil (3.6) jeweils nur auf einem Teil der Rechtecksseiten a und d gültig ist. Betrachten wir zunächst die Seite a; das Stück von a, das außerhalb von $|\xi| < \varrho r$ liegt, wird durch $e^{2\xi}$ auf den Einheitskreis mit $2\varrho r \leq \arc \eta \leq 2\varrho K'$ abgebildet; das entsprechende Stück von a^* muß also in einer Umgebung dieses Kreisbogens liegen. Ist ϱ so groß, daß der betreffende Bogen bereits eine *volle Kreisperipherie* umfaßt, so kann auch der restliche Teil von a^* sich nicht wesentlich vom Einheitskreis entfernen.

Wesentlich anders liegen die Verhältnisse bei der Seite d^*. Der Teil von d, auf dem $|\xi| \geq \varrho r$ ist, wird durch $e^{2\xi}$ auf die reelle Achse mit $e^{-2\varrho K} \leq \eta \leq e^{-2\varrho r}$ abgebildet, also auf ein Stück, das mit wachsendem ϱ beliebig klein wird. Man kann daher aus (3.6) zwar näherungsweise die *Tangente* von d^* in dem einem Endpunkt bestimmen, nicht aber den weiteren Verlauf dieses Kreisbogens. Dieser wird vielmehr festgelegt durch die *Größe des Winkels* zwischen a^* und d^*, die ja in (3.6) nicht auftritt. Berücksichtigt man, daß dieser Winkel die Größe $\delta\pi$ hat, so läßt sich der zu d^* gehörige Kreis leicht näherungsweise konstruieren; er geht mit $\varrho \to \infty$ in den Kreis $|2\eta \cos \pi\delta + i| = 1$ über.

Es sind jetzt also die Kreise, auf denen a^* und d^* liegen, näherungsweise bekannt. Die Seiten selbst erhalten wir, wenn wir die durch (3.6) gegebenen Teilstücke von a^* und d^* auf diesen Kreisen bis zum Schnittpunkt hin verlängern, wobei noch die Überlagerungsverhältnisse in der η-Ebene zu berücksichtigen sind. Man erhält so schließlich das in Fig. 1 gezeigte Kreisbogenviereck.

3.3. Dieses auf indirektem Wege erschlossene Verhalten der Funktion $\eta(\xi)$ in der Umgebung des Nullpunktes wird bestätigt durch Abschätzungen, die im ganzen Rechteck, also auch für $|\xi| < \varrho r$ gültig sind. Wir wählen hierfür die Hilfsdifferentialgleichung

$$\frac{v''}{v} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4} \cdot \frac{1}{\xi^2}, \tag{3.7}$$

deren Lösungen sich explizit angeben lassen. Es ist

$$v(\xi) = \sqrt{\xi}\, Z_\delta(i\xi),$$

wo Z_δ eine beliebige Zylinderfunktion der Ordnung δ bedeutet. Da sich (3.7) für $|\xi| \geqq \varrho r$ ebenfalls durch (3.4) abschätzen läßt, muß es solche Lösungen $v_{1,2}(\xi)$ geben, die sich für große ξ wie die Exponentialfunktion verhalten. Es sind dies die Lösungen

$$\begin{cases} v_1(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2i}}\, e^{i\pi\frac{1+2\delta}{4}} H_\delta^{(1)}(-i\xi) \sim e^{\xi} \\ v_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi\xi}{2i}}\, e^{-i\pi\frac{1+2\delta}{4}} H_\delta^{(2)}(-i\xi) \sim e^{-\xi}, \end{cases} \tag{3.8}$$

wo $H_\delta^{(1)}$, $H_\delta^{(2)}$ die HANKELschen Funktionen sind[17]).

Für diese Funktionen und die vorhin gemachten Voraussetzungen über die Integrationswege sind die Bedingungen (2.26) erfüllt, sofern $\delta^2 \leqq \frac{1}{4}$ ist[18]). Es gelten dann die Abschätzungen:

$$\begin{cases} u_1(\xi) = v_1(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) \\ u_2(\xi) = v_2(\xi)\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right), \end{cases} \tag{3.9}$$

wo $v_{1,2}(\xi)$ die Lösungen (3.8) der Differentialgleichung (3.7) sind. Für den Quotienten $\eta(\xi)$ gilt:

$$\eta(\xi) = \frac{u_1(\xi)}{u_2(\xi)} = \frac{v_1(\xi)}{v_2(\xi)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right). \tag{3.10}$$

Für $|\xi| \geqq \varrho r$ stimmen diese Abschätzungen wegen (3.8) mit (3.5), (3.6) überein. In der Umgebung von $\xi = 0$ wird die durch a und d gebildete Ecke des Rechtecks von dem *Quotienten der Zylinderfunktionen* (3.8) abgebildet auf die durch die Kreisbögen $|\eta| = 1$ und $|2\eta \cos\pi\delta + i| = 1$ bei $\eta = e^{i\pi(\delta - \frac{1}{2})}$ gebildete Ecke. Durch diese Kreisbögen werden also die Viereckseiten a^* und d^* angenähert, was in vollem Einklang zu unseren bisherigen Untersuchungen steht.

3.4. Von Interesse ist der Fall, daß zwei oder alle drei Verzweigungsstellen e_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ in der x-Ebene zusammenrücken. Es gehe etwa in

[17]) WATSON [*11*], S. 196—198.

[18]) Für $\delta = \frac{1}{2}$ wird $v_{1,2}(\xi) = e^{\pm\xi}$ exakt. Für $\delta^2 > \frac{1}{4}$ muß eine andere LIOUVILLE-Transformation zugrunde gelegt werden. S. STALLMANN [*11*], S. 42. Wir kommen in einer II. Mitteilung noch darauf zu sprechen.

(3.2) $k^2 \to 0$ oder $k^2 \to 1$. Dann wird $e_2 = e_3$ bzw. $e_1 = e_2$ und Differentialgleichung (3.1) geht über in eine RIEMANNsche Differentialgleichung:

$$(3.11)\qquad \begin{cases} \dfrac{y''}{y} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\frac{3}{4}}{(x-\frac{2}{3})^2} + \dfrac{1-\delta_0^2}{(x+\frac{1}{3})^2} - \dfrac{\frac{3}{4}-\delta_0^2+\delta^2}{(x-\frac{2}{3})(x+\frac{1}{3})}\right) \\ \qquad\qquad \text{mit} \quad \delta_0^2 = -\varrho^2 - \dfrac{1-(2\delta)^2}{12} \end{cases}$$

oder

$$(3.12)\qquad \begin{cases} \dfrac{y''}{y} = -\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\frac{3}{4}}{(x+\frac{2}{3})^2} + \dfrac{1-\delta_0^2}{(x-\frac{1}{3})^2} - \dfrac{\frac{3}{4}-\delta_0^2+\delta^2}{(x+\frac{2}{3})(x-\frac{1}{3})}\right) \\ \qquad\qquad \text{mit} \quad \delta_0^2 = \varrho^2 - \dfrac{1-(2\delta)^2}{12}. \end{cases}$$

Der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen von (3.11), (3.12) bildet die obere Halbebene auf ein *Kreisbogendreieck* mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\delta_0\pi$ $\delta\pi$ ab.

Studieren wir den entsprechenden Vorgang in der ξ-Ebene: Mit $k^2 \to 0$, 1 wächst das eine Seitenpaar des Rechtecks über alle Grenzen und das Rechteck geht über in einen *Halbstreifen*

$$\Im(\xi) \geqq 0, \quad -\varrho\frac{\pi}{2} \leqq \Re(\xi) \leqq 0 \qquad \text{oder} \qquad \Re(\xi) \leqq 0, \quad 0 \leqq \Im(\xi) \leqq \varrho\frac{\pi}{2}.$$

Die Differentialgleichung (3.3) wird dann

$$(3.13)\qquad \frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4\varrho^2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\xi}{\varrho}} - \frac{1}{3}\right)$$

oder

$$(3.14)\qquad \frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4\varrho^2}\left(\frac{1}{\Im\mathrm{in}^2\frac{\xi}{\varrho}} + \frac{1}{3}\right).$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen lassen sich wieder durch (3.5) bzw. (3.10) abschätzen, wobei jetzt natürlich der Halbstreifen statt des Rechtecks zugrunde zu legen ist.

Im Falle der Differentialgleichung (3.13) rückt bei dem Grenzübergang $k^2 \to 0$ die Rechtecksseite b ins Unendliche und geht dabei verloren. Die entsprechende Seite b^* in der η-Ebene wird durch den Strahl $\arg \eta = 2\varrho K$ angenähert, der sich mit $k^2 \to 0$ unendlich oft um den Nullpunkt dreht. Hierdurch wird das erwähnte Kreisbogendreieck erzeugt, dessen eine Ecke wegen des *imaginären Winkels* $\delta_0\pi$ durch einen sich unendlich oft um den Nullpunkt herumwindenden *Kreisring* gebildet wird (Fig. 2). Auf Grund der Abschätzungen (3.10) liegen seine drei Seiten a^*, c^* und d^* näherungsweise auf den Kreisen $|\eta| = 1$, $|\eta| = e^{-\pi\varrho}$ und $|2\eta\cos\pi\delta + i| = 1$ [19]).

[19]) Man beachte, daß die drei genannten Kreise nicht exakt, sondern nur näherungsweise ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\delta\pi$, $\delta_0\pi$ beranden. Insbesondere hat der Winkel zwischen $|\eta| = 1$ und $|\eta| = e^{-\pi\varrho}$ die Größe $i\pi\varrho$ und nicht $\pi\delta_0$; jedoch ist $\delta_0 = i\varrho + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ für $\varrho \to \infty$

Im Falle der Differentialgleichung (3.14) rückt mit $k^2 \to 1$ die Rechtecksseite c ins Unendliche und die zugehörige Seite c^* in der η-Ebene zieht sich auf den Nullpunkt zusammen. Hierdurch entsteht ein Kreisbogendreieck, dessen Seiten a^*, b^* und d^* näherungsweise auf den Kreisen $|\eta| = 1$, $|2\eta \cos \pi\,\delta + i| = 1$ und dem Strahl $\arc \eta = \pi\,\varrho$ liegen (Fig. 3).

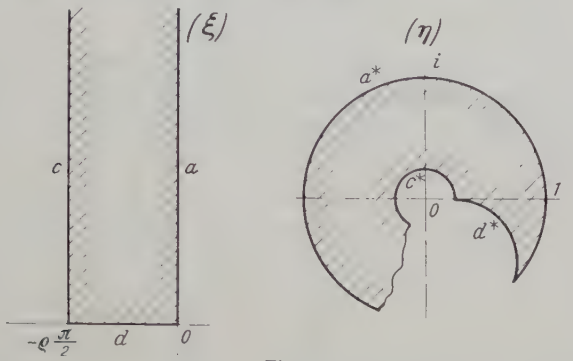

Fig. 2.

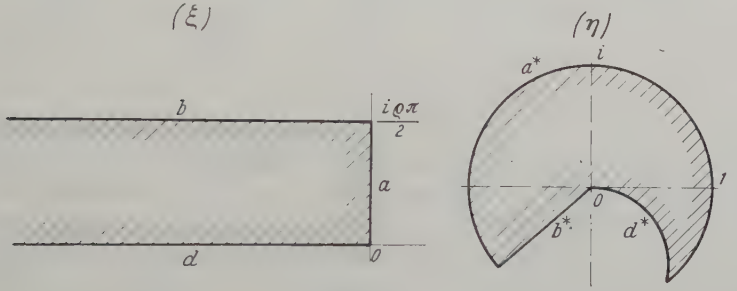

Fig. 3.

3.5. Rücken in Differentialgleichung (3.1) alle drei Verzweigungsstellen e_ν zusammen — wobei (3.2) natürlich nicht mehr gültig bleiben kann —, so tritt ein Konfluenzphänomen auf, wie wir es in § 1.4 schon betrachtet haben. Für $e_1 = e_2 = e_3 = 0$ wird (3.1)

$$\frac{y''}{y} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1+\delta^2}{x^2} - \frac{\varrho^2}{x^3}\right). \tag{3.15}$$

Dies ist eine *konfluente hypergeometrische* Differentialgleichung; sie hat bei $x = \infty$ eine Stelle der Bestimmtheit und bei $x = 0$ eine wesentliche Singularität.

Weiterhin wird $\xi(x) = \frac{-2\varrho}{\sqrt{x}}$; das Rechteck artet also in den *Quadranten* $\Re(\xi) \leqq 0$, $\Im(\xi) \geqq 0$ aus. Die Differentialgleichung (3.3) geht über in

$$\frac{u''}{u} = 1 - \frac{1-(2\delta)^2}{4} \cdot \frac{1}{\xi^2}, \tag{3.16}$$

die wir oben als Hilfsdifferentialgleichung (3.7) einführten.

Zum Studium der konformen Abbildung des Quotienten $\eta(\xi)$ zweier Lösungen von (3.16) beachten wir, daß sowohl die Rechtecksseite b wie c ins Unendliche rückt, wenn $e_\nu \to 0$ geht. In der η-Ebene zieht sich dementsprechend die Seite c^* auf den Nullpunkt zusammen, während der zu b^* gehörige Strahl sich unendlich oft um den Nullpunkt dreht. Hierdurch wird an der Stelle $\eta = 0$ ein logarithmischer Windungspunkt erzeugt und das gewöhnliche Polygon geht in ein *außergewöhnliches* über. Die Seiten a^* und d^* liegen — und zwar bei geeigneter Wahl der Lösungen $u_1(\xi), u_2(\xi)$ *genau* — auf den Kreisen $|\eta| = 1$ und $|2\eta \cos \pi\delta + i| = 1$, wobei der Einheitskreis von $e^{i\pi(\delta-\frac{1}{2})}$ aus in mathematisch positivem Sinne unendlich oft durchlaufen wird (Fig. 4).

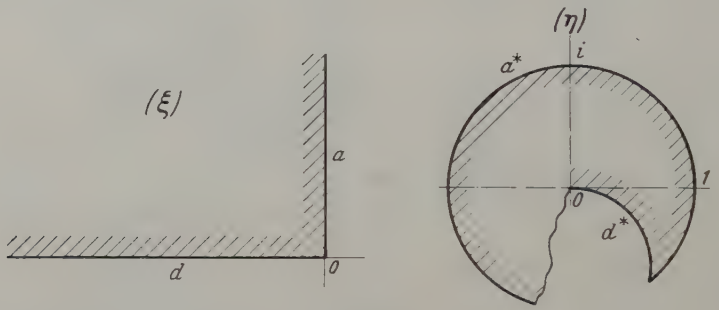

Fig. 4.

3.6. Die eben durchgeführte Untersuchung der LAMÉschen Differentialgleichung und ihrer Ausartungen bildet die Grundlage für die Untersuchung der allgemeinen Differentialgleichung vom Typus (2.4). Wir bemerkten oben, daß das zu einer solchen Differentialgleichung gehörende ξ-Polygon nur von Parallelen zur reellen oder imaginären ξ-Achse berandet wird; auf Grund dieser Eigenschaft läßt sich jedes ξ-Polygon in Rechtecke zerlegen (oder, soweit das ξ-Polygon ins Unendliche reicht, in die vorher betrachteten Halbstreifen und Quadranten), und zwar so, daß in jeweils *höchstens einer Ecke* eines solchen Teilrechtecks eine *singuläre Stelle* der Differentialgleichung (2.4) liegt. Wir können dann in jedem Teilrechteck die Differentialgleichung (2.4) durch eine Hilfsdifferentialgleichung vom Typus (3.4) oder (3.7) annähern, die Lösungen von (2.4) also in solch einem Teilbereich durch Exponential- oder Zylinderfunktionen abschätzen.

Jedes der Teilrechtecke wird gemäß den vorangegangenen Untersuchungen auf Grund dieser Abschätzungen durch $\eta(\xi)$ auf einen Bereich abgebildet, der näherungsweise die Gestalt eines gewissen Kreisbogenvierecks hat. Es ist also das gesuchte Polygon in derselben Weise aus solchen *Teilvierecken* zusammengesetzt, wie das ξ-Polygon aus *Teilrechtecken*. Dabei läßt sich die ungefähre Gestalt des einzelnen Vierecks ohne weiteres aus den Abschätzungen entnehmen; das Zusammensetzen dieser Teilvierecke kann auf Grund einer Überlegung geschehen, die im wesentlichen darauf hinauskommt, daß zwei benachbarte Teilvierecke an der gemeinsamen Kante „*zusammenpassen*" müssen.

Es seien etwa R_1 und R_2 zwei benachbarte Teilrechtecke in der ξ-Ebene. In jedem dieser Teilrechtecke haben wir Differentialgleichung (2.4) asymptotisch abgeschätzt und als Ergebnis in R_1 die Funktionswerte $\eta_1(\xi)$ und in R_2 die Funktionswerte $\eta_2(\xi)$ erhalten. Zwischen $\eta_1(\xi)$ und $\eta_2(\xi)$ muß eine lineare Verbindung bestehen,

$$\eta_1 = \frac{a_{11}\eta_2 + a_{12}}{a_{21}\eta_2 + a_{22}}, \tag{3.17}$$

und diese läßt sich berechnen, wenn man die Werte von $\eta_1(\xi)$ und $\eta_2(\xi)$ auf der *gemeinsamen Kante* kennt. Bekanntlich ist die Relation (3.17) eindeutig bestimmt, wenn zu *drei verschiedenen Werten* von η_1 die zugehörigen Werte von η_2 gegeben sind. Nun wird die gemeinsame Kante zwischen R_1 und R_2 durch $\eta_1(\xi)$ sowohl wie durch $\eta_2(\xi)$ näherungsweise auf gewisse *Kreisbögen* abgebildet — nennen wir sie K_1 und K_2 — die punktweise aufeinander bezogen sind. Wir brauchen also nur drei verschiedene Punkte auf K_1 auszuwählen und die zugehörigen Punkte auf K_2 zu bestimmen, und können daraus (3.17) berechnen.

Mit Hilfe solcher — natürlich auch nur näherungsweise berechneter — Relationen, läßt sich der Aufbau des Gesamtpolygons aus den Teilvierecken ohne Schwierigkeit durchführen. Gewisse Unsicherheiten in der Abschätzung lassen sich oft noch ausgleichen, wenn man berücksichtigt, daß die Ränder des ξ-Polygons in exakte Kreisbögen übergehen müssen; dies ist besonders dann von Bedeutung, wenn an ein und derselben Seite des zu konstruierenden Polygons mehrere Teilvierecke liegen[20]).

Mit diesen Methoden läßt sich nicht nur verhältnismäßig leicht im Einzelfall die Gestalt eines Polygons abschätzen, wenn die zugehörige Differentialgleichung bzw. das ξ-Polygon gegeben ist, sondern wir gewinnen auch eine gute Übersicht über die Veränderungen in der Gestalt eines Polygons bei Änderung des zugehörigen ξ-Polygons. Insoweit wir die Abhängigkeit des ξ-Polygons von den Koeffizienten der Differentialgleichung kennen, gewinnen wir dadurch auch einen Einblick in die Zusammenhänge zwischen Differentialgleichung und Gestalt des Polygons. Das *Parameterproblem* der Differentialgleichung ist damit zurückgeführt auf das einfachere *Parameterproblem* für spezielle SCHWARZ-CHRISTOFFELsche Integrale. Dies Parameterproblem ist freilich auch noch nicht allgemein gelöst, doch sind die Verhältnisse hier wesentlich durchsichtiger, so daß wenigstens Aussagen *qualitativer* Art ohne umfangreiche Rechnungen gemacht werden können.

3.7. Ein gutes Beispiel herfür bietet die Untersuchung des schon in § 1.4 besprochenen Grenzübergangs der *Konfluenz*. Wir setzen im Anschluß an (1.6) und (2.1):

$$R_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x) = -2\left(r_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x) + \varrho^2 \varphi_{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n}(x)\right), \tag{3.18}$$

[20]) Eine Reihe von Beispielen für solche Polygonkonstruktionen findet man bei STALLMANN [*10*]. Eine ausführliche Durchrechnung einzelner Beispiele soll eine II. Mitteilung bringen.

wobei auch für $\varepsilon_\varkappa = 0$ $(\varkappa = 1, 2 \ldots n)$ $r_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}(x)$ keine Pole von höherer als zweiter Ordnung haben soll. Wir können dann $\varphi_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}(x)$ schreiben als

$$\varphi_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}(x) = \frac{\varphi^*_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}(x)}{\prod_{\varkappa=1}^{n} (x - x_0 - \varepsilon_\varkappa)}, \tag{3.19}$$

wo $\varphi^*_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}(x)$ in der Umgebung von x_0 regulär ist.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die $\varepsilon_\varkappa$ alle voneinander verschieden sind; dann ist das Integral

$$\xi_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}(x) = \varrho \int_{x_1}^{x} \sqrt{\varphi_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n}(x)}\, dx \tag{3.20}$$

für $\varepsilon_\varkappa \neq 0$ in der Umgebung von x_0 beschränkt. Der zugehörige Teil des ξ-Polygons werde dann wie besprochen in Rechtecke eingeteilt, die dann alle zunächst *endliche* Größe haben. Mit $\varepsilon_\varkappa \to 0$ wird das ξ-Polygon dort *unendlich* und die betreffenden Teilrechtecke arten aus in *Halbstreifen* oder *Quadranten*. Das Polygon in der η-Ebene ist dann an der betreffenden Stelle nicht mehr aus *Teilvierecken* zusammengesetzt, sondern aus *Kreisbogendreiecken* und solchen *außergewöhnlichen Polygonen*, wie wir sie im Zusammenhang mit Differentialgleichung (3.16) in Fig. 4 dargestellt haben. Man sieht leicht, daß genau $n-2$ solche *außergewöhnliche Polygone* als Teilpolygone auftreten. Die zugehörigen *logarithmischen Windungspunkte* fallen bis auf höchstens zwei je paarweise zusammen. Alle weiteren Eigenschaften des Polygons hängen noch von der speziellen Gestalt des ξ-Polygons ab und können leicht aus ihr entnommen werden[21]).

3.8. Die Anwendung unseres Abschätzungsverfahrens unterliegt allerdings noch einer Einschränkung: Wir hatten die Näherungswerte für die Lösungen der Differentialgleichung (2.1) als *asymptotische Abschätzungen* für $\varrho \to \infty$ gewonnen, sie gelten also nur für *hinreichend große* ϱ. Für unser eben diskutiertes Verfahren ist gleichbedeutend damit die Forderung, daß die *singulären Stellen im ξ-Polygon hinreichend weit voneinander entfernt* sein müssen, denn nur dann überwiegt in den einzelnen Teilrechtecken jeweils der Einfluß der zu diesem Rechteck gehörigen Singularität und $q(\xi)$ wird hinreichend klein. Wenn wir also mit unseren Methoden Gestaltänderungen eines Kreisbogenpolygons studieren wollen, wie sie durch Änderung des zugehörigen ξ-Polygons hervorgerufen werden, dann werden wir solche Änderungen ausschließen müssen, bei denen sich die Singularitäten im ξ-Polygon einander *unbegrenzt nähern*.

Es ist jedoch vielfach noch möglich, auch solche Fälle zu untersuchen, wenn wir, statt der bisher benutzten, kompliziertere Hilfsdifferentialglei-

[21]) Diese asymptotischen Abschätzungen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen enthalten auch in sich die Hauptglieder der bekannten Entwicklungen von THOMÉ für diesen Fall, und zwar in einer Art, der die Bedeutung dieser Entwicklungen sehr klar hervortreten läßt. Siehe etwa BIEBERBACH [*1*], S. 174f.

chungen und Hilfsfunktionen zugrunde legen. Prinzipiell wird man dabei ausgehen von einer bekannten Differentialgleichung vom Typus (2.1) und auf sie die LIOUVILLE-Transformation (2.3) ausüben. Wenn das so erhaltene ξ-Polygon in einem Teilstück mit dem vorgegebenen ξ-Polygon übereinstimmt — wobei natürlich auch die *Singularitäten* übereinstimmen müssen —, dann wird man solche kompliziertere Teilstücke in der gleichen Weise behandeln können, wie bisher die *Teilrechtecke*. Das vollständige Polygon in der η-Ebene wird dann nicht allein aus *Kreisbogenvierecken* sondern aus *komplizierteren Teilpolygonen* zusammengesetzt sein.

Wesentlich ist dabei, daß an *„Nahtstellen"*, d.h. dort, wo im ξ-Polygon zwei Teilstücke zusammenstoßen, die Funktionen $P(\xi)$ und $Q(\xi)$ hinreichend klein sind. Es gehen nämlich dann die Abschätzungen, die in einem Teilstück gewonnen wurden, ohne weiteres in die Abschätzungen des anderen Teilstücks über, weil sich an solchen Nahtstellen die Lösungen von (2.4) wie die Exponentialfunktion verhalten. Hinreichend weit von solchen Nahtstellen entfernt dürfen dann Singularitäten in beliebiger Zahl und Verteilung auftreten.

Wir werden uns natürlich auf solche Hilfsdifferentialgleichungen beschränken müssen, deren Lösungen man im nötigen Umfang beherrscht. Es kommen hier im wesentlichen die *hypergeometrische* Differentialgleichung und ihre *konfluenten Ausartungen* in Betracht, d.h. die durch eine LIOUVILLE-Transformation (2.3) hieraus entstehenden Differentialgleichungen. Die bisher betrachteten Differentialgleichungen der Exponential- und der Zylinderfunktionen gehören ja auch in diese Klasse. Eine systematische Untersuchung solcher Hilfsdifferentialgleichungen soll in einer II. Mitteilung durchgeführt werden.

Zur historischen Entwicklung ist noch zu bemerken, daß die asymptotische Integration zunächst nur mit Hilfe der Exponentialfunktion durchgeführt wurde[22]; später zog man Spezialfälle der Zylinderfunktionen heran[23]. Ein Spezialfall der konfluenten hypergeometrischen Funktionen als Hilfsfunktion wird von R. E. LANGER untersucht und zur Abschätzung der MATHIEUschen Differentialgleichung benutzt[24]. Die allgemeine hypergeometrische Differentialgleichung ist in diesem Zusammenhang bisher noch nicht betrachtet worden.

Literatur.

[1] BIEBERBACH, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953. — [2] HORN, J.: Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter. Math. Ann. **52**, 271—292 (1899). — [3] LANGER, R. E.: The asymptotic solutions of ordinary differential equations of the second order, with special reference to the Stokes phenomenon. Bull. Amer. Math. Soc. **40**, 545—582 (1934). — [4] LANGER, R. E.: On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 23—64 (1931). — [5] LANGER, R. E.: On the asymptotic solutions

[22] Als grundlegende Arbeit wäre hier HORN [2] zu nennen.

[23] Einen zusammenfassenden Bericht gibt LANGER [3].

[24] LANGER [6] und [7].

of differential equations, with an application to the Bessel functions of large complex order. Trans. Amer. Math. Soc. **34**, 447—480 (1932). — [*6*] Langer, R. E.: The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second crder. Trans Amer. Math. Soc. **36**, 90—106 (1934). — [*7*] Langer, R. E.: The solutions of the Mathieu equation with a complex variable and at least one parameter large. Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 637—695 (1934). — [*8*] Langer, R. E.: On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes phenomenon about a singular point. Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 397—416 (1935). — [*9*] Nevanlinna, R.: Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. Upsala **58**, 295—373 (1932). — [*10*] Stallmann, F.: Zum Parameterproblem der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen. Mitt. Math. Seminar Gießen **43** (1952). — [*11*] Watson, G. N.: Bessel Functions. Cambridge 1922.

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 13. Januar 1954.)

Rieger, G. J.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 213—234 (1954)

Zu Linniks Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$.

Von

G. J. Rieger.

Bekanntlich hat D. Hilbert [4] [1]) im Jahre 1909 als erster die von E. Waring 1770 aufgestellte Vermutung bewiesen:

Jede natürliche Zahl läßt sich als Summe von n-ten Potenzen natürlicher Zahlen darstellen, so daß deren Anzahl $g(n)$ unterhalb einer Schranke bleibt, die nur von n, nicht dagegen von der darzustellenden Zahl abhängt (Satz von Waring-Hilbert).

Man bezeichnet gewöhnlich mit $g(n)$ die bei festem n kleinstmögliche derartige Anzahl.

Man kann diesen Satz auch so formulieren:

Die n-ten Potenzen (der natürlichen Zahlen) bilden eine Basis (der natürlichen Zahlen). Ihre Ordnung ist $g(n)$.

Gegen 1920 haben die Herren G. H. Hardy und J. E. Littlewood [3] unter Verwendung von funktionentheoretischen Sätzen (Cauchyscher Integralsatz) einen völlig neuen Zugang zu diesem Satz gefunden. Eine wesentliche Rolle spielt in ihren Überlegungen eine noch zu definierende Größe $r_k(m)$, die die Lösungsanzahl einer gewissen diophantischen Gleichung angibt. Mit Hilfe der „*singular series*" erhalten sie einen asymptotischen Ausdruck für $r_k(m)$.

Im Jahre 1942 hat nun Herr J. V. Linnik [10] eine neue Lösung des Waringschen Problems gegeben, bei der die Größe $r_k(m)$ wieder auftritt. Die Leistung von Herrn Linnik besteht vor allem darin, daß es ihm gelang, $r_k(m)$ auf vollständig elementarem Wege nach oben abzuschätzen, und zwar mit der gleichen Größenordnung, wie sie in der Hardy-Littlewoodschen Lösung auftritt. Daraus folgt dann die Aussage des obigen Satzes in einfacher Weise.

Die Lösung von Herrn Linnik ist nicht die erste elementare Lösung; eine solche lag bereits 1912 vor (vgl. [2], [12]).

Während sich aus dem Hilbertschen Beweis nur eine sehr grobe Schranke für $g(n)$ herleiten ließ (vgl. [14]), konnte aus dem Hardy-Littlewoodschen Beweis eine sehr genaue angegeben werden:

Jede hinreichend große Zahl läßt sich als Summe von höchstens $(n-2)\,2^{n-1}+5$ n-ten Potenzen schreiben, d.h.

$$G(n) \leq (n-2)\,2^{n-1}+5.$$

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Dieses Ergebnis wurde in der Folgezeit noch verbessert, so daß heute der genaue Wert der Konstanten $g(n)$, $G(n)$ für eine Reihe von Werten von n bekannt ist.

Da der LINNIKschen Lösung der gleiche Beweisgedanke wie der HARDY-LITTLEWOODschen zugrunde liegt, drängt sich die Frage auf, ob sich auch aus dem (an entscheidender Stelle indirekt geführten) LINNIKschen Beweis eine obere Schranke für $g(n)$ konstruieren läßt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, eine obere Abschätzung für $g(n)$ an Hand des LINNIKschen Beweises anzugeben. Unser Ergebnis wird wesentlich allgemeiner sein; insbesondere werden wir für die KAMKEsche [7] und für die SCHNIRELMANNsche Verallgemeinerung des WARING-HILBERTschen Satzes [15] elementare Beweise geben (vgl. [13]) und das zugehörige $g(n)$ zum ersten Male auf elementarem Wege abschätzen. Für die KAMKEsche Verallgemeinerung ist eine solche Abschätzung z. B. von L. K. HUA [5], [6] auf analytischem Wege gegeben worden.

Die vorliegende Arbeit schließt sich so weit als möglich an die von Herrn LINNIK [10] an. An vielen Stellen hätten wir uns mit einem Verweis auf [10] begnügen können, doch wäre das mehr störend als förderlich gewesen. In § 1 geben wir fünf Lemmata über lineare Gleichungen wieder, mit deren Hilfe in § 2 das Hauptlemma bewiesen wird. In § 3 wird ein einfacher Hilfssatz über Dichten von Folgen bewiesen. Die Sätze 1 und 2 von § 4 gestatten dann unmittelbar die Abschätzung von $g(n)$.

Alle Beweise und Abschätzungen sind in allen Teilen elementar, d.h. es werden nur arithmetische Operationen ausgeführt.

§ 1. Fünf Lemmata über lineare Gleichungen.

In diesem Paragraphen werden einige Abschätzungen für die Anzahl der Lösungen linearer Gleichungen gegeben. Da die Lemmata 1, 4 und 5 keine „Konstanten" $c(n)$ enthalten, können wir sie wörtlich aus [10] übernehmen und auf einen Beweis verzichten. Die Lemmata 2 und 3 müssen wir hingegen hier beweisen, da wir für unsere Zwecke explizite Ausdrücke für die „Konstanten" $c(n)$ brauchen.

Lemma 1. *Sind in der Gleichung*

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 = m \tag{1}$$

a_1, a_2, m *ganze Zahlen mit*

$$|a_2| \leq |a_1| \leq A, \qquad (a_1, a_2) = 1,$$

so übertrifft die Anzahl der den Ungleichungen

$$|z_1| \leq A, \quad |z_2| \leq A$$

genügenden Lösungen von (1) *nicht*

$$\frac{3A}{|a_1|}.$$

Beweis. [2]).

Lemma 2. *Sind in der Gleichung*

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_l z_l = m \tag{2}$$

die a_λ und m ganze Zahlen mit

$$|a_\lambda| \leqq A, \quad (a_1, a_2, \ldots, a_l) = 1 \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

so übertrifft die Anzahl der den Ungleichungen

$$|z_\lambda| \leqq A \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) \tag{3}$$

genügenden Lösungen von (2) *nicht*

$$3^{l-1}(l-1)!\,\frac{A^{l-1}}{H}$$

mit

$$H = \max_{\lambda=1}^{l} |a_\lambda|.$$

Beweis. Wegen Lemma 1 ist Lemma 2 für $l = 2$ bereits bewiesen. Wir wollen daher voraussetzen, daß $l \geqq 3$ ist und daß das Lemma 2 für $l-1$ Unbekannte schon feststeht. Da die Reihenfolge der Numerierung gleichgültig ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $H = |a_l|$ annehmen.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. $a_1 = a_2 = \cdots = a_{l-1} = 0$. Wegen $(a_1, a_2, \ldots, a_l) = 1$ ist $|a_l| = H = 1$, so daß die gegebene Gleichung die Form

$$\pm z = m$$

erhält. Offenbar kann in dieser Gleichung jede der Unbekannten $z_1, z_2, \ldots, z_{l-1}$ einen beliebigen ganzzahligen Wert aus $(-A, A)$ [3]), im ganzen also höchstens $2A + 1 \leqq 3A$ Werte annehmen, z_l hingegen höchstens einen. Daher übertrifft die Anzahl der den Ungleichungen (3) genügenden Lösungen der vorgegebenen Gleichung nicht

$$(3A)^{l-1} < 3^{l-1}(l-1)!\,\frac{A^{l-1}}{H},$$

womit das Lemma für diesen Fall bewiesen ist.

2. Ist mindestens eine der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ von Null verschieden, so existiert $(a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}) = \delta$. Wir bezeichnen mit

$$H' = \max_{\lambda=1}^{l-1} \frac{|a_\lambda|}{\delta}.$$

Es mögen jetzt die Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_l$ der vorgegebenen Gl. (2) und den Ungleichungen (3) genügen. Wir setzen

$$\frac{a_1}{\delta} z_1 + \cdots + \frac{a_{l-1}}{\delta} z_{l-1} = m'. \tag{4}$$

[2]) Vgl. [1], 38.

[3]) Die Grenzen sind jeweils eingeschlossen.

Dabei ist offenbar

$$\delta m' + a_l z_l = m \tag{5}$$

und

$$|\delta m'| \leq \sum_{\lambda=1}^{l-1} |a_\lambda| \, |z_\lambda| \leq (l-1)\, \delta H' A,$$

woraus

$$|m'| \leq (l-1)\, H' A$$

folgt.

In (4) ist offenbar $\delta \leq |a_l|$ und $(\delta, a_l) = 1$, da wir andernfalls $(a_1, \ldots, a_{l-1}, a_l) > 1$ hätten. Daher übertrifft die Anzahl der Lösungen von (5) in den Unbekannten m', z_l mit

$$|m'| \leq (l-1)\, H' A, \qquad |z_l| \leq A < (l-1)\, H' A$$

wegen Lemma 1 nicht

$$\frac{3(l-1)\, H' A}{|a_l|}.$$

Für dasselbe m' hat (4) auf Grund des Lemmas 2 für $l-1$ Unbekannte höchstens

$$3^{l-2}(l-2)!\, \frac{A^{l-2}}{H'}$$

Lösungen in ganzen z_λ mit $|z_\lambda| \leq A$ $(\lambda = 1, \ldots, l-1)$.

Also übertrifft die Anzahl der den Ungleichungen (3) genügenden Lösungen $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ von (2) nicht

$$\frac{3(l-1)\, H' A}{|a_l|} \cdot 3^{l-2}(l-2)!\, \frac{A^{l-2}}{H'} = 3^{l-1}(l-1)!\, \frac{A^{l-1}}{H},$$

womit das Lemma 2 auch für diesen Fall bewiesen ist.

Lemma 3. *Ist $l > 2$ und $1 \leq A \leq B \leq c_1 A^{l-1}$, so übertrifft die Summe der Anzahlen der Lösungen z_λ mit*

$$|z_\lambda| \leq B \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

für alle Gleichungen von der Gestalt

$$a_1 z_1 + \cdots + a_l z_l = m \tag{6}$$

mit

$$|a_\lambda| \leq A \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

nicht

$$\max\left(3^l c_1, 3^{2l+1}(l-1)!\right)(AB)^{l-1}.$$

Beweis. Wir unterscheiden drei Fälle.

1. $a_1 = a_2 = \cdots = a_l = 0$. Da in diesem Falle jedes z_λ höchstens $2B + 1 \leq 3B$ verschiedene Werte annehmen kann, übertrifft die Anzahl der Systeme $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ nicht

$$(3B)^l \leq 3^l c_1 (AB)^{l-1}.$$

2. Ist mindestens eine der Zahlen a_λ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ von Null verschieden, so existiert $(a_1, a_2, \ldots, a_l) = \delta$. Es sei zunächst $\delta = 1$ und

$$H = \max_{\lambda=1}^{l} |a_\lambda| .$$

Offenbar ist $1 \leqq H \leqq A$. Also läßt sich sicher eine ganze Zahl $n \geqq 0$ angeben derart, daß

$$\frac{A}{2^{n+1}} < H \leqq \frac{A}{2^n} \tag{7}$$

ist.

Bei *einer* Gleichung von der Gestalt (6), in der $\delta = 1$ ist und H den Ungleichungen (7) genügt, übertrifft die Anzahl der Lösungen z_λ mit $|z_\lambda| \leqq B$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ wegen Lemma 2 nicht

$$3^{l-1}(l-1)!\frac{B^{l-1}}{H} < 2 \cdot 3^{l-1}(l-1)!\frac{B^{l-1}2^n}{A} .$$

Anderseits folgt aus (7)

$$|a_\lambda| \leqq \frac{A}{2^n} \qquad (\lambda = 1, \ldots, l) . \tag{8}$$

Folglich ist die Anzahl der Gleichungen vom Typus (6), für die die Ungleichungen (7) erfüllt sind, höchstens gleich der Anzahl der den Bedingungen (8) genügenden Gleichungen vom selben Typus, d.h. höchstens

$$\left(2\frac{A}{2^n} + 1\right)^l \leqq 3^l \frac{A^l}{2^{ln}} .$$

Somit übertrifft die Summe der Anzahlen der Lösungen z_λ mit $|z_\lambda| \leqq B$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$ *aller* solcher Gleichungen vom Typus (6) mit

$$\delta = 1, \qquad \frac{A}{2^{n+1}} < H \leqq \frac{A}{2^n}$$

nicht

$$2 \cdot 3^{l-1}(l-1)!\frac{B^{l-1}2^n}{A} \cdot 3^l \frac{A^l}{2^{ln}} = 2 \cdot 3^{2l-1}(l-1)!\frac{(AB)^{l-1}}{2^{(l-1)n}} .$$

Wir summieren über alle $n \geqq 0$ und erhalten: Die Summe der Anzahlen der Lösungen $(z_1, z_2, \ldots, z_l)$ mit $|z_\lambda| \leqq B$ aller Gleichungen (6) mit

$$\delta = 1, \qquad |a_\lambda| \leqq A \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

ist höchstens

$$4 \cdot 3^{2l-1}(l-1)!\,(AB)^{l-1} .$$

3. Es verbleibt uns, die Anzahlen der Lösungen des geforderten Typus für Gleichungen mit $\delta > 1$ abzuschätzen. Ist $\delta \nmid m$, ist die Lösungsanzahl gleich Null und wir sind fertig. Wir können also $\delta \mid m$ annehmen. In diesem

Falle ist (6) offenbar gleichbedeutend mit

$$\frac{a_1}{\delta} z_1 + \frac{a_2}{\delta} z_2 + \cdots + \frac{a_l}{\delta} z_l = \frac{m}{\delta},$$

d.h. einer Gleichung vom selben Typus (6), wo nur

$$\left(\frac{a_1}{\delta}, \frac{a_2}{\delta}, \ldots, \frac{a_l}{\delta}\right) = 1$$

ist und die Zahl A durch die Zahl A/δ zu ersetzen ist. Bei festem δ übertrifft die Summe der Anzahlen der Lösungen z_λ mit $|z_\lambda| \leq B$ aller solchen Gleichungen, wie wir in 2. gesehen haben, nicht[4])

$$4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! \left(\frac{A}{\delta} B\right)^{l-1} = 4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! \frac{(AB)^{l-1}}{\delta^{l-1}}.$$

Jetzt haben wir nur noch diesen Ausdruck über alle möglichen Werte δ $(\delta = 1, \ldots, A)$ zu summieren[5]). Somit übertrifft die Summe der Anzahlen der geforderten Lösungen aller Gleichungen von der Gestalt (6), wo $|a_\lambda| \leq A$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$ und nicht alle a_λ gleich Null sind, nicht die Größe

$$4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! (AB)^{l-1} \sum_{\delta=1}^{A} \frac{1}{\delta^{l-1}} < 4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! \frac{l-1}{l-2} (AB)^{l-1}.$$

Vergleichen wir abschließend die Ergebnisse von 1., 2. und 3. und beachten wir, daß

$$\max\left(3^l c_1,\ 4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)!,\ 4 \cdot 3^{2l-1} (l-1)! \frac{l-1}{l-2}\right) \leq \max\left(3^l c_1, 3^{2l+1} (l-1)!\right)$$

ist, so ist damit das Lemma 3 vollständig bewiesen.

---

[4]) Da wir jetzt statt A die kleinere Zahl A/δ zu nehmen haben, könnte $B \leq c_1 A^{l-1}$ nicht mehr erfüllt sein. Von dieser Voraussetzung haben wir aber im Falle 2. nirgends Gebrauch gemacht. Also ist das Ergebnis von 2. davon unabhängig.

[5]) *Sind q, A beliebige natürliche Zahlen, so gilt die Ungleichung*

$$\sum_{n=1}^{A} \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{q+1}{q}.$$

Beweis. Für $n \geq 1$ ist sicher

$$\frac{1}{(n+1)^{q+1}} < \frac{1}{q}\left(\frac{1}{n^q} - \frac{1}{(n+1)^q}\right).$$

Durch Summieren erhalten wir

$$\sum_{n=2}^{A} \frac{1}{n^{q+1}} < \frac{1}{q}\left(1 - \frac{1}{A^q}\right) < \frac{1}{q},$$

woraus die Behauptung folgt.

Lemma 4. *Die Anzahl der Lösungen der Gleichung*

$$x + y = c, \qquad x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{B}$$

übertrifft nicht die halbe Summe der Anzahlen der Lösungen der Gleichungen

$$x - y = 0, \qquad x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{A}$$

und

$$x - y = 0, \qquad x \in \mathfrak{B},\ y \in \mathfrak{B}.$$

Beweis.[6]).

Für den Sonderfall, daß die Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ übereinstimmen, erhalten wir die

Folgerung. *Die Anzahl der Lösungen einer Gleichung*

$$x + y = c, \qquad x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{A}$$

übertrifft nicht die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$x - y = 0, \qquad x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{A}.$$

Lemma 5. *Die Anzahl der Lösungen der Gleichung*

$$x_1 + x_2 - \cdots - x_l = c, \qquad x_\lambda \in \mathfrak{A}_\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, l)$$

übertrifft nicht die Summe der Anzahlen der Lösungen der Gleichung

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y^{(1)} + \cdots + y^{(2^{s-1})} - y^{(2^{s-1}+1)} - \cdots - y^{(2^s)} = 0, \\ y^{(\tau)} = y_1^{(\tau)} + \cdots + y_k^{(\tau)} \\ y_1^{(\tau)} \in \mathfrak{A}_{\sigma k+1}, \ldots, y_k^{(\tau)} \in \mathfrak{A}_{\sigma k+k} \end{array} \right\} \quad \tau = (1, 2, 3, \ldots, 2^s)$$

unter den Voraussetzungen $\sigma = 0, 1, 2, \ldots, 2^s - 1$. *Dabei ist* $l = k \cdot 2^s$.

Beweis.[7]).

Jetzt sind die Vorbereitungen abgeschlossen und wir können mit dem Beweis des Hauptlemmas beginnen.

§ 2. Das Hauptlemma.

Es sei $f(x)$ ein Polynom n-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}.$$

Wir bezeichnen mit $r_k(m)$ die Anzahl der Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ (unter Berücksichtigung der Reihenfolge) von

$$(10) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} f(x_\varkappa) = m \qquad (1 \leq m \leq N)$$

mit

$$x_\varkappa \text{ ganz}, \ |x_\varkappa| \leq N^{1/n} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

[6]) Vgl. [*1*], 44—46.
[7]) Vgl. [*1*], 46—49.

Hauptlemma. *Für die Koeffizienten des Polynoms $f(x)$ gelte*

$$|a_\nu| \leq c_0(n)\, N^{\nu/n} \quad [8] \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n); \tag{11}$$

dann ist bei passend gewähltem $k = k(n)$

$$r_k(m) < c\left(n, c_0(n)\right) N^{\frac{k}{n}-1} \qquad (1 \leq m \leq N)$$

mit

$$c\left(n, c_0(n)\right) = 5^{2k(n)}\, k(n)^{4k(n-1)}\, c_0(n)^{4k(n-1)}\, c\left(n-1, 2^n c_0(n)\right)^{2n}. \tag{13}$$

Beweis (durch Schluß von $n-1$ auf n).

Im Falle $n = 1$ setzen wir $k(1) = 2$, so daß die Gl. (10) die Form

$$a_0(x_1 + x_2) = m - 2a_1$$

erhält. Da es sich um die Lösungen x_1, x_2 handelt mit $|x_1| \leq N$, $|x_2| \leq N$, sind für x_1 höchstens $2N+1 \leq 3N$ Werte möglich; da jedem x_1 höchstens ein x_2 entspricht, ist

$$r_2(m) \leq 3N = c\left(1, c_0(1)\right) N, \tag{14}$$

womit unser Satz für $n = 1$ bewiesen ist.

Es sei jetzt $n > 1$ und unsere Behauptung für $n-1$ bereits bewiesen. Wir setzen $k(n-1) = k'$ und wählen

$$k = k(n) = 2n \cdot 2^{3+[^2\log k']}\ [9],$$

wo der Exponent die größte, $3 + {}^2\log k'$ nicht übertreffende ganze Zahl bedeutet. Wegen $k(1) = 2$ gilt

$$8n \cdot k' < k = k(n) \leq 16n\, k' \leq \cdots \leq 2 \cdot 16^{n-1}\, n! < 2^{2n^2}. \tag{15}$$

Im folgenden wollen wir

$$s = 2 + [^2\log k']$$

setzen, so daß

$$k(n) = 2n \cdot 2^{s+1} \tag{16}$$

ist.

Die Anwendung von Lemma 4 ergibt[10]:

Die von uns abzuschätzende Zahl $r_k(m)$ übertrifft nicht die Summe der Anzahlen der Lösungen in den ganzen Zahlen y_k mit

$$|y_\varkappa| \leq 2N^{1/n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k/2)$$

[8]) Für $c_0(n)$ können wir etwa

$$c_0(n) = \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \tag{12}$$

wählen.

[9]) Diese etwas andere Definition von $k(n)$ (vgl. [*1*], 51) ist mit dem gesamten Beweis verträglich; die Abschätzungen werden jedoch genauer.

[10]) Vgl. [*1*], 51—53.

aller Gleichungen der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{k/2} h_\varkappa \varphi_\varkappa(y_\varkappa) = 0, \tag{17}$$

die sich für alle möglichen Werte der ganzen Zahlen h_k mit

$$|h_\varkappa| \leq 2N^{1/n} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k/2)$$

ergeben. Dabei ist

$$\varphi_\varkappa(y) = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\varkappa\nu}\, y^{n-\nu} \tag{18}$$

ein Polynom $(n-1)$-ten Grades mit den von den Zahlen $h_\varkappa$ abhängigen Koeffizienten

$$a_{\varkappa\nu} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} a_\mu \binom{n-\mu}{\nu-\mu} h_\varkappa^{\nu-\mu-1} \qquad \binom{\nu = 1, \ldots, n}{\varkappa = 1, 2, \ldots, k/2}. \tag{19}$$

Jetzt wollen wir *eine* der Gln. (17) untersuchen, d.h. wir wollen die Zahlen $h_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k/2)$ für einen Augenblick als fest voraussetzen. Auf diese Gleichung wenden wir Lemma 5 an. Dabei spielen die $h_\varkappa \varphi_\varkappa(y_\varkappa)$ die Rolle der Unbekannten x_i, die Zahl $k/2 = 2n \cdot 2^s$ die der Zahl l. Die Menge $\mathfrak{A}_\varkappa$, der die Zahlen $x_\varkappa = h_\varkappa \varphi_\varkappa(y_\varkappa)$ angehören müssen, besteht im vorliegenden Fall aus allen Zahlen der Form $h_\varkappa \varphi_\varkappa(y_\varkappa)$, wo die $h_\varkappa$ gegebene feste Werte haben und die $y_\varkappa$ das Intervall $(-2N^{1/n}, 2N^{1/n})$ durchlaufen.

Nach Lemma 5 übertrifft die Anzahl der den eben beschriebenen Forderungen genügenden Lösungen der Gl. (17) nicht die Summe der Anzahlen der Lösungen der Gleichung

$$y^{(1)} + \cdots + y^{(2^{s-1})} - y^{(2^{s-1}+1)} - \cdots - y^{(2^s)} = 0 \tag{9}$$

unter den folgenden 2^s Voraussetzungen, die den Werten $\sigma = 0, 1, \ldots, 2^s - 1$ entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} y^{(\tau)} &= \sum_{\nu=1}^{2n} y_\nu^{(\tau)}, \\ y_\nu^{(\tau)} &\in \mathfrak{A}_{\sigma \cdot 2n+\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, 2n) \end{aligned}\right\} \quad (\tau = 1, 2, \ldots, 2^s).$$

In entwickelter Form sieht Gl. (9) für den Fall $\sigma = 0$ (den wir lediglich als Beispiel wählen) unter Änderung der Reihenfolge der Summanden so aus:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} (y_\nu^{(1)} + \cdots + y_\nu^{(2^{s-1})} - y_\nu^{(2^{s-1}+1)} - \cdots - y_\nu^{(2^s)}) = 0.$$

Jede der Zahlen $y_\nu^{(\tau)}$ ist hier eine Zahl von der Form $h_\nu \varphi_\nu(v_\nu^{(\tau)})$, wo

$$|v_\nu^{(\tau)}| \leq 2N^{1/n}$$

ist. Indem wir abkürzend

$$z_\nu = \varphi_\nu(v_\nu^{(1)}) + \cdots + \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1})}) - \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1}+1)}) - \cdots - \varphi_\nu(v^{(2^s)}) \qquad (\nu = 1, \ldots, 2n) \tag{20}$$

setzen, können wir die Gl. (9) kurz so schreiben:

$$\sum_{\nu=1}^{2n} h_\nu z_\nu = 0. \tag{21}$$

Wir werden im ganzen 2^s Gleichungen von dieser Art haben. Ihre Gesamtheit läßt sich kurz in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{2n} h_{\sigma \cdot 2n+\nu} z_{\sigma \cdot 2n+\nu} = 0 \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, 2^s - 1)$$

hinschreiben. Wir werden uns vorläufig auf die Untersuchung der Gl. (21) beschränken, die wir als typisch ansehen können. Für die Abschätzung der Anzahl der uns interessierenden Lösungen dieser Gleichung müssen wir erst nachsehen, innerhalb welcher Grenzen sich die Größen $\varphi_\nu(v_\nu^{(\tau)})$, z_ν verändern können.

Wegen

$$\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \binom{n-\mu}{\nu-\mu} < 2^n, \quad |h_\varkappa| \leq 2N^{1/n} \qquad \binom{\nu = 1, \ldots, n}{\varkappa = 1, \ldots, k/2}$$

und wegen (11) folgt aus (19)

$$|a_{\varkappa\nu}| < 2^{n+\nu-1} c_0(n) N^{\frac{\nu-1}{n}}. \tag{22}$$

Beachten wir noch, daß $|v_\nu^{(\tau)}| \leq 2N^{1/n}$ ist, so folgt aus (18) bzw. (20)

$$|\varphi(v_\nu^{(\tau)})| < n \cdot 2^{2n-1} c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}} \tag{23}$$

und

$$|z_\nu| < 2^s \cdot n\, 2^{2n-1} c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}} = 2^{2n-3} k(n) c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}} \qquad \binom{\nu = 1, \ldots, 2n}{\tau = 1, \ldots, 2^s}.$$

Somit kann in der Gl. (21) jedes z_ν nur Werte annehmen, die im Intervall

$$\left(-2^{2n-3} k c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}},\ 2^{2n-3} k c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}}\right) \tag{24}$$

liegen.

Es sei m eine dieser Zahlen. Die Gleichung

$$z_\nu = m \tag{25}$$

ist im allgemeinen auf mehrere Arten erfüllbar, da die Definition von z_ν so beschaffen ist, daß sich ein und derselbe Wert von z_ν bei verschiedener Wahl der $v_\nu^{(\tau)}$ $(\tau = 1, \ldots, 2^s)$ durchaus ergeben kann. Wir werden nun bei der Abschätzung der Anzahl der Lösungen von (25), d.h. der Gleichung

$$\varphi_\nu(v_\nu^{(1)}) + \cdots + \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1})}) - \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1}+1)}) - \cdots - \varphi_\nu(v_\nu^{(2^s)}) = m \tag{26}$$

die angekündigte Induktion anwenden.

Zuerst schreiben wir (26) in der Form

$$\sum_{\varkappa=1}^{k'} \varphi_\nu(v_\nu^{(\varkappa)}) = m - \varphi_\nu(v_\nu^{(k'+1)}) - \cdots + \varphi_\nu(v_\nu^{(2^{s-1}+1)}) + \cdots + \varphi_\nu(v_\nu^{(2^s)})$$

auf. Das kann man tun, da für $k' = k(n-1) > 1$ wegen (16), (15)

$$2^{s-1} \geqq k'$$

gilt. Bezeichnen wir die rechte Seite der letzten Gleichung mit m', so erhalten wir

$$\sum_{\varkappa=1}^{k'} \varphi_\nu(v_\nu^{(\varkappa)}) = m'. \tag{27}$$

Wir wählen für die Zahlen $v_\nu^{(\tau)}$ $(\tau = k'+1, \ldots, 2^s)$ irgendwelche bestimmte Werte aus dem Intervall $(-2N^{1/n}, 2N^{1/n})$. Dann erhält auch m' einen bestimmten Wert. Auf (27) wenden wir nun den zu beweisenden Satz an, da $\varphi_\nu(y)$ ein Polynom vom Grad $n-1$ ist.

Wir überzeugen uns nun, daß alle Voraussetzungen erfüllt sind. Da m im Intervall (24) liegt, folgt aus der Definition von m' wegen (23)

$$\begin{cases} m' < \left(2^{2n-3} k\, c_0(n) + (2^s - k')\, n\, 2^{2n-1} c_0(n)\right) N^{\frac{n-1}{n}} \\ \quad < 2^{2(n-1)} k\, c_0(n)\, N^{\frac{n-1}{n}} = N'. \end{cases} \tag{28}$$

Wegen (22) ist sicher

$$|a_{\varkappa\nu}| \leqq c_0(n-1)\, N'^{\frac{\nu-1}{n-1}}, \tag{29}$$

wobei wir für $c_0(n-1)$ etwa folgende Wahl treffen:

$$c_0(n-1) = 2^n \cdot c_0(n). \tag{30}$$

Wegen (28) kann die Rolle des N von N' übernommen werden. Dann stellen die Bedingungen (29), denen die Koeffizienten des Polynoms $\varphi_\varkappa(y)$ genügen, gerade die Bedingungen (11) dar, wobei nur n durch $(n-1)$ ersetzt ist. Somit sind alle Voraussetzungen tatsächlich erfüllt.

Da

$$2N^{\frac{1}{n}} < N'^{\frac{1}{n-1}}$$

ist, können wir behaupten:

Die Anzahl der Lösungen der Gl. (27), *für die*

$$|v_\nu^{(\varkappa)}| \leqq 2N^{1/n}$$

ist, übertrifft nicht die Zahl

$$c(n-1, c_0(n-1))\, N'^{\frac{k'}{n-1}-1}. \tag{31}$$

Diese Abschätzung ergibt sich für die festen Werte $v_\nu^{(\tau)}$ $(\tau = k'+1, \ldots, 2^s)$. Ersichtlich haben wir höchstens

$$\left(2N^{\frac{1}{n}} + 1\right)^{2^s - k'} < 3^{2^s - k'} N^{\frac{2^s - k'}{n}} \tag{32}$$

solche Wertsysteme. Die Gesamtanzahl der Lösungen vom verlangten Typus für die Gl. (26) übertrifft nicht das Produkt von (31) und (32), d.h. sie ist wegen

$$N' = 2^{2(n-1)}\, k\, c_0(n)\, N^{\frac{n-1}{n}}$$

höchstens

$$3^{2^s-k'}\, c\left(n-1, c_0(n-1)\right)\left(2^{2(n-1)}\, k\, c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1} N^{\frac{2^s-n+1}{n}} \tag{33}$$

Wir wenden uns wieder Gl. (21) zu. Wir haben früher gesehen, daß jedes z_ν nur im Intervall (24) liegen kann. Jetzt haben wir gefunden, daß die Vielfachheit jedes dieser Werte (d.h. die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten für $y_\nu^{(\tau)}$, mittels deren die Gleichung lösbar ist) die Zahl (33) nicht übertrifft.

Das bisherige Ergebnis dieses Paragraphen lautet:

Die von uns abzuschätzende Zahl $r_k(m)$ übertrifft nicht die Summe der Anzahlen der Lösungen in ganzen z_ν mit

$$|z_\nu| \leq 2^{2n-3}\, k\, c_0(n)\, N^{\frac{n-1}{n}}$$

und den Vielfachheiten

$$\lambda_\nu < 3^{2^s-k'}\, c\left(n-1, c_0(n-1)\right)\left(2^{2(n-1)} k\, c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1} N^{\frac{2^s-n+1}{n}} \tag{34}$$

der Gleichungen von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{2n} h_{\sigma\cdot 2n+\nu}\, z_{\sigma\cdot 2n+\nu} = 0 \qquad (\sigma = 0, 1, \ldots, 2^s - 1), \tag{35}$$

wo die Zahlen $h_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, 2n\cdot 2^s$) unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen des Intervalls $(-2N^{1/n}, 2N^{1/n})$ durchlaufen.

Mit Hilfe von Lemma 3 gelangen wir jetzt rasch zum Ziel. Wir bezeichnen mit Γ irgendeine bestimmte Kombination der Zahlen $h_\varkappa$ mit

$$|h_\varkappa| \leq 2N^{1/n} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k/2)$$

und mit $U_\sigma(\Gamma)$ die Anzahl der Lösungen der Gl. (35) für diese feste Kombination Γ und für ein bestimmtes vorgegebenes σ, wobei es sich um die Lösungen z_ν handelt, die dem Intervall (24) angehören und die Vielfachheiten λ_ν (34) haben. Dann ist nach dem eben formulierten Ergebnis

$$r_k(m) \leq \sum_\Gamma \left\{ \sum_{\sigma=0}^{2^s-1} U_\sigma(\Gamma) \right\}$$

oder

$$r_k(m) \leq \sum_{\sigma=0}^{2^s-1} \left\{ \sum_\Gamma U_\sigma(\Gamma) \right\}.$$

Da sich die Gln. (35) und damit die Summen $\sum_\Gamma U_\sigma(\Gamma)$ für verschiedenes σ durch nichts voneinander unterscheiden, ist

$$r_k(m) \leq 2^s \sum_\Gamma U_0(\Gamma).$$

Bezeichnen wir mit $U_0^*(\Gamma)$ die Anzahl der Lösungen der Gl. (35) für $\sigma = 0$ unter der Voraussetzung, daß alle z_r einfach sind, so ist offenbar

$$U_0(\Gamma) < \left(3^{2^s-k'} c\left(n-1, c_0(n-1)\right)\left(2^{2(n-1)} k\, c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1} N^{\frac{2^s-n+1}{n}}\right)^{2n} U_0^*(\Gamma)$$

und folglich

$$(36)\qquad \begin{cases} r_k(m) < 2^s\left(3^{2^s-k'} c\left(n-1, c_0(n-1)\right)\left(2^{2(n-1)} k\, c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1}\right)^{2n} \times \\ \qquad \times N^{2(2^s-n+1)} \sum_{\Gamma} U_0^*(\Gamma). \end{cases}$$

Jedes Γ stellt eine gewisse zulässige Kombination der Werte *aller* $h_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k/2$) dar. Indessen ist die Zahl $U_0^*(\Gamma)$ vollständig durch die Zahlen $h_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, 2n$) bestimmt, denn nur sie gehen in die Gl. (35) für $\sigma = 0$ ein. Zu einer festen Kombination Γ gehört eindeutig ein Γ' der Zahlen $h_1, \ldots, h_{2n}$. Einer festen Kombination Γ' entsprechen dagegen so viele Kombinationen Γ, wie sich Auswahlen für die übrigen $h_\varkappa$ ($\varkappa = 2n+1, \ldots, k/2$) treffen lassen. Wegen $|h_\varkappa| \leqq 2N^{1/n}$ gehören zu einer Kombination Γ' höchstens

$$\left(5N^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{k}{2}-2n}$$

Kombinationen Γ. Daher ist

$$\sum_{\Gamma} U_0^*(\Gamma) \leqq 5^{\frac{k}{2}-2n} N^{\frac{k}{2n}-2} \sum_{\Gamma'} U_0^*(\Gamma').$$

Hier ist $U_0^*(\Gamma')$ die Anzahl der Lösungen von (35) für $\sigma = 0$ in ganzen z_ν [wobei die z_ν ($\nu = 1, \ldots, 2n$) im Intervall (24) liegen] für die vorgegebene Kombination Γ' der Zahlen h_ν mit $|h_\nu| \leqq 2N^{1/n}$ ($\nu = 1, \ldots, 2n$). Die Summation wird über alle derartigen Kombinationen Γ' erstreckt. Aus (36) erhalten wir

$$(37)\qquad \begin{cases} r_k(m) < 2^s\left(3^{2^s-k'} c\left(n-1, c_0(n-1)\right)\left(2^{2(n-1)} k\, c_0(n)\right)^{\frac{k'}{n-1}-1}\right)^{2n} \times \\ \qquad \times 5^{\frac{k}{2}-2n} N^{2(2^{s+1}-n)} \sum_{\Gamma'} U_0^*(\Gamma'). \end{cases}$$

Jetzt wird $\sum_{\Gamma'} U_0^*(\Gamma')$ unmittelbar mit Hilfe von Lemma 3 abgeschätzt. Es ist

$$l = 2n, \quad A = 2N^{\frac{1}{n}}, \quad B = 2^{2n-3} k\, c_0(n) N^{\frac{n-1}{n}}$$

und etwa

$$c_1 = \frac{k}{4} c_0(n)$$

zu setzen. Dann ist sicher $B \leqq c_1 A^{l-1}$. Da alle Voraussetzungen erfüllt sind, erhalten wir

$$\sum_{\Gamma'} U_0^*(\Gamma') \leqq \max\left(3^{2n} \frac{k}{4} c_0(n), 3^{4n+1}(2n-1)!\right)(AB)^{2n-1}.$$

Da wegen (15)

$$3^{2n}\frac{k}{4}c_0(n) < 3^{4n+1}(2n-1)!\,c_0(n)$$

ist, gilt

$$\sum_{\Gamma'} U_0^*(\Gamma') \leqq 3^{4n+1}(2n-1)!\,c_0(n)\left(2\cdot 2^{2n-3}k\,c_0(n)\right)^{2n-1}N^{2n-1}.$$

Damit geht (37) über in

$$r_k(m) < 2^s(\ldots)^{2n}5^{\frac{k}{2}-2n}\cdot 3^{4n+1}(2n-1)!\,c_0(n)\left(2\cdot 2^{2n-3}k\,c_0(n)\right)^{2n-1}N^{\frac{k}{n}-1}.$$

Addieren wir die Exponenten gleicher Grundzahlen und beachten wir, daß

$$2^{s+2} = \frac{k}{n} \qquad \text{wegen (16)},$$

$$\frac{2n}{n-1} \leqq 4,$$

$$2^s - k' \leqq 3k' \qquad \text{wegen (16)},$$

$$3^{4n+1} < 2^{2n}\cdot 5^{2n}\cdot n \quad (n \geqq 2),$$

$$2^{4nk'}3^{6nk'}(2n-1)! < 5^{\frac{3}{2}k} \qquad \text{wegen (15)}$$

ist, so folgt unter Berücksichtigung von (30)

$$(13)\quad r_k(m) < 5^{2k}\left(k\,c_0(n)\right)^{4k'}\cdot c\left(n-1, 2^n c_0(n)\right)^{2n}\cdot N^{\frac{k}{n}-1} = c\left(n, c_0(n)\right)N^{\frac{k}{n}-1}.$$

Damit ist das Hauptlemma *vollständig bewiesen.*

Der Übersichtlichkeit halber werden wir jetzt $c(n, c_0(n))$ so nach oben abschätzen, daß $c_0(n)$ nur noch explizit vorkommt.

Setzen wir in Einklang mit (30)

$$(38)\qquad c_0(n-\nu) = 2^{(n-\nu+1)}\cdot c_0(n-\nu+1) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-2),$$

so können wir (13) so schreiben:

$$\begin{aligned} c\left(n, c_0(n)\right) &= 5^{2k(n)}k(n)^{4k(n-1)}c_0(n)^{4k(n-1)}c\left(n-1, c_0(n-1)\right)^{2n} \\ &= 5^{2k(n)}k(n)^{4k(n-1)}c_0(n)^{4k(n-1)}\times \\ &\quad\times\left(5^{2k(n-1)}k(n-1)^{4k(n-2)}c_0(n-1)^{4k(n-2)}\right)^{2n}\times \\ &\quad\times\left(5^{2k(n-2)}k(n-2)^{4k(n-3)}c_0(n-2)^{4k(n-3)}\right)^{2n\cdot 2(n-1)}\times \\ &\quad\cdots\cdots \\ &\quad\times\left(5^{2\cdot k(2)}k(2)^{4k(1)}c_0(2)^{4k(1)}\right)^{2n\cdot 2(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 3}\times \\ &\quad\times c\left(1, c_0(1)\right)^{2n\cdot 2(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 2}. \end{aligned}$$

Wir schätzen jede Spalte durch den Anfang einer geometrischen Reihe ab. Als Grundzahl verwenden wir dabei die jeweils größte in einer Spalte stehende Grundzahl: Da $k(n)$ mit n monoton wächst, $c_0(n)$ mit n monoton abnimmt [wegen (38)], sind das die Zahlen $5, k(n), c_0(2)$.

Da

$$2k(n) > 4 \cdot 2n \cdot 2k(n-1) \qquad \text{wegen (15)},$$

$$4k(n-1) > 2 \cdot 2n \cdot 4k(n-2) \qquad \text{wegen (15)},$$

$$c\left(1, c_0(1)\right) = 3 \qquad \text{wegen (14)},$$

erhalten wir

$$c\left(n, c_0(n)\right) < 5^{\frac{4}{3} \cdot 2k(n)}\, k(n)^{2 \cdot 4k(n-1)}\, c_0(2)^{2 \cdot 4k(n-1)}\, 3^{n! 2^{n-1}}.$$

Nun folgt offenbar aus (38)

$$c_0(2) = 2^{\frac{n(n+1)}{2} - 3}\, c_0(n) < 2^{n^2}\, c_0(n).$$

Also ist

(39) $$c\left(n, c_0(n)\right) < 2^{8n^2 k(n-1)}\, 3^{n! 2^{n-1}}\, 5^{3k(n)}\, k(n)^{8k(n-1)}\, c_0(n)^{8k(n-1)} = C\left(n, c_0(n)\right).$$

Da $k(n)$ eine wohlbekannte Funktion von n ist, haben wir damit die „Konstante“ $c\left(n, c_0(n)\right)$ des Hauptlemmas explizit durch n, $c_0(n)$ allein nach oben abgeschätzt. Insbesondere ist also

(40) $$r_k(m) < C\left(n, c_0(n)\right) N^{\frac{k}{n} - 1},$$

wobei wir unter $C\left(n, c_0(n)\right)$ eine beliebige obere Schranke von $c\left(n, c_0(n)\right)$ verstehen, etwa die in (39) angegebene.

Der nun zu beweisende Hilfssatz über Dichten von Zahlenfolgen erlaubt uns dann, mit Hilfe des zuletzt erzielten Ergebnisses eine explizite Schranke für $g(n)$ anzugeben. Das ist ja unser Ziel.

§ 3. Ein Hilfssatz.

Definition. Es sei $\mathfrak{A}$ eine monotone Folge von paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen[11]). Ist x eine natürliche Zahl, so bezeichnen wir mit $A(x)$ die Anzahl der Zahlen $a \in \mathfrak{A}$ mit $1 \leq a \leq x$. Man definiert die Dichte von $\mathfrak{A}$ als

$$d(\mathfrak{A}) = \operatorname*{fin}_{x=1,2,\ldots} \frac{A(x)}{x}.$$

Hilfssatz. *Es sei ε eine beliebige reelle Zahl >0, N_0 eine beliebige natürliche Zahl; dann folgt aus*

$$1 \in \mathfrak{A},\ d(\mathfrak{A}) \leq \min\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{1}{N_0 + 1}\right)$$

die Existenz einer natürlichen Zahl $N > N_0$ mit

$$A(N) < \varepsilon N.$$

11) Diese beiden Eigenschaften wollen wir von allen Folgen verlangen. Insbesondere werden alle (etwa bei Summenfolgen) mehrmals auftretenden Zahlen nur einmal aufgeschrieben.

Beweis. Bezüglich der Folge $\mathfrak{A}$ sind offenbar zwei Fälle möglich.

1. Für alle $N > 0$ ist $\frac{A(N)}{N} > d(\mathfrak{A})$. Dann gibt es nach der Definition von $d(\mathfrak{A})$ zu jedem N_1 ein $N_2 > N_1$ mit

$$\frac{A(N_2)}{N_2} < \frac{A(N_1)}{N_1}.$$

Wegen $d(\mathfrak{A}) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$ gibt es Zahlen N mit $\frac{A(N)}{N} < \varepsilon$, und zwar, wie wir eben gesehen haben, beliebig große.

2. Es gibt Zahlen N' (mindestens eine) mit $\frac{A(N')}{N'} = d(\mathfrak{A})$. Dann ist

$$d(\mathfrak{A}) = \frac{A(N')}{N'} \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \text{d.h.} \quad A(N') < \varepsilon N'.$$

Aus $1 \in \mathfrak{A}$ folgt aber $A(N') \geqq 1$ und daraus $d(\mathfrak{A}') \geqq \frac{1}{N'}$. Wegen $d(\mathfrak{A}) \leqq \frac{1}{N_0 + 1}$ folgt somit $N' \geqq N_0 + 1 > N_0$, wie es sein soll.

Damit ist der Hilfssatz *vollständig bewiesen.*

§ 4. Die Abschätzung von $g(n)$.

Wir wollen jetzt von $f(x)$ noch zusätzlich voraussetzen, daß $f(x) \geqq 0$ ist für $x \geqq 0$. Das bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da uns hier nur die Darstellungen einer positiven Zahl m durch positive Summanden der Form $f(x_i)$ interessieren. Die nun folgenden Überlegungen ließen sich auch ohne diese Zusatzvoraussetzung mit unwesentlichen Abänderungen durchführen.

Satz 1. *Es sei n eine ganze Zahl $\geqq 2$. Wir erklären* (wie in § 2) $k(n)$ *rekursiv*:

$$k = k(n) = 2n \cdot 2^{3 + [^3 \log k(n-1)]},$$

$$k(1) = 2.$$

Es sei

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$$

ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten mit $a_0 > 0$; ferner sei $f(x) \geqq 0$ für jede ganze Zahl $x \geqq 0$; durchläuft dann $x_\varkappa$ eine (monotone) Folge $\mathfrak{M}_\varkappa$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$) von (paarweise verschiedenen) natürlichen Zahlen mit

$$d(\mathfrak{M}_\varkappa) \geqq \delta \qquad (0 < \delta \leqq 1),$$

dann hat die so entstehende Folge

$$\mathfrak{A}^{(k)'} = \{1, f(x_1) + \cdots + f(x_k)\}$$

eine positive Dichte:

$$d(\mathfrak{A}^{(k)'}) > \frac{1}{4C(n, c_0(n))} \cdot \left(\frac{\delta}{2\left(k \cdot (n+1) \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu|\right)^{1/n}} \right)^k \text{ [12]}. \tag{41}$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}$ die Folge aller natürlichen Zahlen, mit $\mathfrak{M}_\varkappa$ eine Folge von natürlichen Zahlen mit $d(\mathfrak{M}_\varkappa) \geqq \delta$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$, mit $\bar{r}_k(m)$ bzw. $\bar{r}'_k(m)$ die Anzahl der Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ (mit Berücksichtigung der Reihenfolge) von

$$f(x_1) + \cdots + f(x_k) = m, \qquad x_k \leqq N^{1/n}, \qquad 1 \leqq m \leqq N, \tag{42}$$

wobei $x_\varkappa \in \mathfrak{N}$ bzw. $\in \mathfrak{M}_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ ist, und mit $\mathfrak{A}^{(k)}$ bzw. $\mathfrak{A}^{(k)'}$ die Folge aller Zahlen m, die sich in der Gestalt (42) schreiben lassen mit $x_\varkappa \in \mathfrak{N}$ bzw. $\in \mathfrak{M}_\varkappa$, wobei wir die Zahl 1 noch hinzunehmen, falls nicht

$$f(x_1) + \cdots + f(x_k) = 1$$

ohnehin schon lösbar ist.

Offenbar ist

$$\bar{r}'_k(m) \leqq \bar{r}_k(m) \leqq r_k(m) \text{ [13]} \tag{43}$$

und

$$\mathfrak{A}^{(k)'} \subseteqq \mathfrak{A}^{(k)}.$$

Aus der Definition von $\bar{r}'_k(m)$ ergibt sich unmittelbar, daß

$$\bar{r}'_k(0) + \bar{r}'_k(1) + \cdots + \bar{r}'_k(N) = R'(N)$$

die Anzahl aller Lösungssysteme $(x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_\varkappa \in \mathfrak{M}_\varkappa$ ist, für die

$$0 \leqq f(x_1) + \cdots + f(x_k) \leqq N, \qquad x_\varkappa \leqq N^{1/n} \tag{44}$$

gilt.

Für $x \geqq 1$ ist sicher

$$0 \leqq f(x) \leqq (n+1) \cdot \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \cdot x^n.$$

Für alle

$$N \geqq k \cdot (n+1) \cdot \max |a_\nu|$$

genügt also der Forderung (44) offenbar jede Menge von natürlichen Zahlen $x_1, \ldots, x_k$ mit $x_\varkappa \in \mathfrak{M}_\varkappa$, für die

$$(n+1) \max |a_\nu| \, x_\varkappa^n \leqq \frac{N}{k}$$

oder

$$1 \leqq x_\varkappa \leqq \left(\frac{N}{k \cdot (n+1) \max |a_\nu|} \right)^{1/n}$$

---

[12]) Hier ist $C(n, c_0(n))$ etwa die in (39) angegebene Schranke. Da wir wegen (12)

$$c_0(n) = \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu|$$

wählen können, haben wir damit $d(\mathfrak{A}^{(k)'})$ durch $n, \max_{\nu=0}^{n} |a_\nu|, \delta$ allein nach unten abgeschätzt.

[13]) Vgl. die Definition von $r_k(m)$ in § 2.

gilt. Man kann also jedes $x_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ auf mindestens

$$M_\varkappa\left(\left[\left(\frac{N}{k\cdot(n+1)\max|a_\nu|}\right)^{1/n}\right]\right) \geqq d(\mathfrak{M}_\varkappa)\left[\left(\frac{N}{k\cdot(n+1)\max|a_\nu|}\right)^{1/n}\right]$$

verschiedene Arten wählen. Für $N \geqq 2^n k\cdot(n+1)\max|a_\nu|$ ist sicher

$$d(\mathfrak{M}_\varkappa)\left[\left(\frac{N}{k\cdot(n+1)\max|a_\nu|}\right)^{1/n}\right] > \frac{\delta}{2}\left(\frac{N}{k\cdot(n+1)\max|a_\nu|}\right)^{1/n}.$$

Da sich in (44) diese Werte $x_\varkappa$ noch willkürlich kombinieren lassen, folgt für alle $N \geqq 2^n k\cdot(n+1)\max|a_\nu|$

$$R(N) > (K N^{1/n})^k \tag{45}$$

mit

$$K = \frac{\delta}{2\,(k\cdot(n+1)\max|a_\nu|)^{1/n}}.$$

Sicher ist $K < 1$.

Wäre nun

$$d(\mathfrak{A}^{(k)'}) \leqq \min\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{1}{N_0+1}\right)$$

mit

$$\varepsilon = \frac{K^k}{2C(n, c_0(n))} \tag{46}$$

und

$$N_0 = \frac{2n^n}{K^n}, \tag{47}$$

so existierte wegen $1 \in \mathfrak{A}^{(k)'}$ auf Grund des Hilfssatzes von § 3 sicher eine natürliche Zahl

$$N_1 > N_0 \tag{48}$$

mit

$$A^{(k)'}(N_1) < \varepsilon N_1. \tag{49}$$

Auf Grund der Voraussetzungen über das Polynom $f(x)$ hat (42) genau dann eine Lösung für $m = 0$, wenn

$$f(x_\varkappa) = 0 \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k)$$

ist. Da $f(x)$ als Polynom n-ten Grades höchstens n Nullstellen hat und da diese sich in (42) noch willkürlich kombinieren lassen, folgt

$$r_k(0) \leqq n^k.$$

Wegen (43), (49) erhalten wir durch Anwendung des Hauptlemmas (40)

$$R'(N_1) = \sum_0^{N_1} \bar{r}'_k(m) \leqq r_k(0) + \sum_{m=1}^{N_1} r_k(m) <$$

$$< n^k + C\left(n, c_0(n)\right) N_1^{\frac{k}{n}-1} A^{(k)'}(N_1) < n^k + C\left(n, c_0(n)\right) \varepsilon N_1^{\frac{k}{n}}.$$

Wegen (48), (46), (47) ist sicher

$$R'(N_1) < 2C\left(n, c_0(n)\right) \varepsilon N_1^{k/n} = (K N_1^{1/n})^k.$$

Diese letzte Ungleichung widerspricht aber der Ungleichung (45), die für *alle*

$$N \geqq 2^n k \cdot (n+1) \max |a_\nu|,$$

also insbesondere [wegen (48), (47)] für N_1 gilt. Die Annahme

$$d(\mathfrak{A}^{(k)'}) \leq \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{N_0+1}\right)$$

ist also zu verwerfen.

Da wegen $K<1$, $C\left(n, c_0(n)\right) \geqq 1$ aus (46), (47)

$$\frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{N_0+1}$$

folgt, ist *notwendigerweise*

$$d(\mathfrak{A}^{(k)'}) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit ist Satz 1 *vollständig bewiesen.*

Aus Satz 1 folgt sofort, daß die Dichte der Folge

$$\mathfrak{A}^{(k)''} = \{\{0, 1, f(x_1)\} + \cdots \{0, 1, f(x_k)\}\} \qquad (x_\varkappa \in \mathfrak{M}_\varkappa)$$

größer als die in (41) angegebene Schranke ist, da

$$\mathfrak{A}^{(k)'} \subseteq \mathfrak{A}^{(k)''}$$

ist.

Satz 2. *Es sei n eine ganze Zahl $\geqq 2$. Wir erklären $k(n)$ rekursiv als*

$$k = k(n) = 2n \cdot 2^{3+[3\log k(n-1)]},$$

$$k(1) = 2.$$

Es sei $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{n-\nu}$ ein Polynom n-ten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten mit $a_0 > 0$; ferner sei $f(x) \geqq 0$ für jede ganze Zahl $x \geqq 0$. Es sei δ eine beliebige reelle Zahl mit $0 < \delta \leqq 1$ und es sei l definiert als

$$l = \left[4C\left(n, c_0(n)\right)\left(\frac{2\left(k \cdot (n+1) \max |a_\nu|\right)^{1/n}}{\delta}\right)^k\right] + 1. \tag{50}$$

Durchläuft dann $x_\varkappa$ eine Folge $\mathfrak{M}_\varkappa$ mit $d(\mathfrak{M}_\varkappa) \geqq \delta$ $(\varkappa = 1, \ldots, k\,l)$, dann hat die so entstehende Folge

$$\mathfrak{A}^{(kl)''} = \{\{0, 1, f(x_1)\} + \cdots + \{0, 1, f(x_{kl})\}\}$$

die Dichte 1:

$$d(\mathfrak{A}^{(kl)''}) = 1;$$

d.h. die Folge $\mathfrak{A}^{(kl)''}$ umfaßt alle natürlichen Zahlen.

Beweis. Satz 2 folgt unmittelbar aus Satz 1 durch Anwendung des Satzes von H. B. Mann[14]) für l Summanden.

[14]) Für den Satz von Mann vgl. etwa [1], 24—32.

Nun sind wir gleich am Ziel. Die Sätze 1 und 2 besagen nämlich unter anderem, daß die Folge

$$\mathfrak{A}^{(1)'} = \{0, 1, f(x_1)\}, \qquad x_1 \in \mathfrak{M}_1$$

eine Basis bildet. Ihre Ordnung $g(n, f, \delta)$ läßt sich sofort nach oben abschätzen[15]). Offenbar ist

$$g(n, f, \delta) \leqq k\,l.$$

Aus (50) folgt

$$l < 8C\left(n, c_0(n)\right) \cdot \left(\frac{2(2k\,n \max|a_\nu|)^{1/n}}{\delta}\right)^k.$$

Daraus folgt unter Beachtung von (39), (12), (15) und wegen

$$n^{\frac{k}{n}} < k^{\frac{k}{n}-1}, \qquad 5^3 < 2^7, \qquad \frac{k}{n} + 3 < k$$

die Abschätzung

$$g(n, f, \delta) < 2^{9k+8n^2k'} \cdot k^{2\frac{k}{n}+8k'} \cdot 3^{n!\,2^{n-1}} \cdot \frac{(\max|a_\nu|)^{24k'}}{\delta^k}.$$

Wegen (15) folgt daraus unmittelbar das

Ergebnis: *Es ist*

$$g(n, f, \delta) < \left(\frac{2^{22n^2}\left(\max_{\nu=0}^{n}|a_\nu|\right)^3}{\delta^{2n}}\right)^{16^{n-1}(n-1)!}. \tag{51}$$

Darin sind nun drei interessante Sonderfälle enthalten. Setzen wir nämlich

$$\mathfrak{M}_1 = \cdots = \mathfrak{M}_{k\,l} = \mathfrak{N}, \quad \text{d.h.} \quad \delta = 1$$

bzw.

$$\mathfrak{M}_1 = \cdots = \mathfrak{M}_{k\,l} \quad \text{und} \quad f(x) = x^n, \quad \text{d.h.} \quad \max|a_\nu| = 1,$$

so erhalten wir gerade eine Abschätzung des zur KAMKEschen [7] bzw. SCHNIRELMANNschen Verallgemeinerung [15] gehörigen $g(n)$. Eine Abschätzung zum ursprünglichen WARINGschen Problem (Satz von WARING-HILBERT [4]) gewinnen wir, wenn wir zugleich

$$\delta = 1 \quad \text{und} \quad f(x) = x^n, \quad \text{d.h.} \quad \max|a_\nu| = 1$$

setzen:

$$g(n) < 2^{2 \cdot 16^n (n+1)!}.$$

Da wir größtenteils sehr roh abschätzen mußten, ist auch das Ergebnis sehr grob. Uns lag jedoch in erster Linie daran, ohne Beachtung der Feinheiten den LINNIKschen Beweis auf möglichst einfachem Wege konstruktiv zu wenden. Daß sich der LINNIKsche Beweis konstruktiv wenden läßt, ist von Bedeutung für alle weiteren Ergebnisse, die sich mit dieser Methode noch gewinnen lassen. Doch darauf wollen wir hier nicht näher eingehen.

[15]) Eine Folge $\mathfrak{A}$ heißt eine Basis von der Ordnung h, wenn sich jede natürliche Zahl als Summe von höchstens h Zahlen aus $\mathfrak{A}$ schreiben läßt.

§ 5. Anmerkungen.

1. Die Abschätzung (51) kann noch wesentlich verbessert werden. Soll jedoch der LINNIKsche Beweis in seinem Aufbau unverändert bleiben, läßt sich die Schranke für $g(n)$ nicht unter $k(n)$ herunterdrücken. Sie wäre genau dann gleich $k(n)$, wenn wir die Aussage (41) von Satz 1 zu

$$d(\mathfrak{A}^{(k)'}) = 1$$

verschärfen könnten. Aber auch diese Schranke liegt noch beträchtlich über der auf analytischem Wege gefundenen, da aus (15) wegen $k(1) = 2$ sofort

$$k(n) > 2 \cdot 8^{n-1} n!$$

folgt.

2. Man kann die Sätze 1 und 2 insofern noch verallgemeinern, daß wir die Voraussetzung „*mit* $d(\mathfrak{M}_\varkappa) \geqq \delta$" durch die schwächere Voraussetzung „*mit* $\delta(\mathfrak{M}_\varkappa) \geqq \delta$" ersetzen[16]). Dadurch ändert sich die Schranke (41) geringfügig. Die Beweise bleiben fast wörtlich die gleichen.

3. Man kann Satz 1 auf „Quasi-Polynome mit rationalen Koeffizienten und rationalen Exponenten" übertragen:

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^{b_\nu} \qquad \begin{pmatrix} b_0 > b_1 > \cdots > b_n > 0 \\ a_0 > 0 \end{pmatrix}$$ [17]).

Wir setzen noch voraus, daß $F(x) \geqq 0$ ist für jede ganze Zahl $x \geqq 0$.

Wir zeigen, daß die Folge

$$\mathfrak{F} = \{0, 1, [F(x)]\}, \qquad x \in \mathfrak{N}$$

eine Basis bildet. Dafür ist hinreichend, das von einer Teilfolge $\mathfrak{F}'$ nachzuweisen.

Wir bezeichnen mit a bzw. b den Hauptnenner der Zahlen a_ν bzw. b_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$. Es durchlaufe y alle natürlichen Zahlen (oder nur eine Folge von positiver Dichte). Wir setzen

$$x = (a\,y)^b.$$

Offenbar ist $F((a\,y)^b)$ ein Polynom in y mit *ganz*zahligen Koeffizienten und *ganz*zahligen Exponenten. Da alle Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind, gilt eine Ungleichung (41). Damit ist alles bewiesen.

4. Wie wir oben gesehen haben, ist in (51) eine Abschätzung für das $g(n, f, 1)$ der KAMKEschen Verallgemeinerung des WARING-HILBERTschen

[16]) Dabei bedeutet $\delta(\mathfrak{A})$ die untere asymptotische Dichte einer Folge $\mathfrak{A}$. Sie ist definiert als

$$\delta(\mathfrak{A}) = \underset{x=1,2,\ldots}{\lim} \frac{A(x)}{x}.$$

[17]) Das kann abgeschwächt werden zu

$$\begin{pmatrix} b_0 > b_1 > \cdots > b_n \\ a_0 > 0, \qquad b_0 > 0 \end{pmatrix}.$$

Satzes enthalten. Vielleicht ist es nicht uninteressant, zu bemerken, daß man auch aus dem Beweis von Herrn Kamke [7] eine Abschätzung herleiten kann. Das gelingt auch auf elementarem Wege, und zwar mit den vom Verfasser in [14] benutzten Methoden. Doch darauf wollen wir hier nicht näher eingehen.

Literatur.

[1] Chinčin, A. Ja.: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin 1951. — [2] Frobenius, G.: Über den Stridsbergschen Beweis des Waringschen Satzes. Berl. Ber. **1912**, 666—670 (1912). — [3] Hardy, G. H., u. J. E. Littlewood: Vgl. [8], S. 235ff. — [4] Hilbert, D.: Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen (Waringsches Problem). Math. Ann. **67**, 281—300 (1909). — [5] Hua, L. K.: On a generalized Waring Problem. Proc. Lond. Math. Soc. **43**, 161—182 (1937). — [6] Hua, L. K.: On Waring's problem. Quart. J. Math., Oxford Ser. **9**, 199—202 (1938). — [7] Kamke, E.: Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes. Math. Ann. **83**, 85—112 (1921). — [8] Landau, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie I. Leipzig 1927. — [9] Landau, E.: Zum Waringschen Problem. Math. Z. **12**, 219—247 (1922). — [10] Linnik, J. V.: Vgl. [1], S. 33—61. — [11] Nečaev, V. I.: Das Waringsche Problem für Polynome. Trudy Mat. Inst. Steklov **38**, 190—243 (1951). — [12] Remak, R.: Bemerkung zu Herrn Stridsbergs Beweis des Waringschen Theorems. Math. Ann. **72**, 153—156 (1912). — [13] Rieger, G. J.: Über eine Verallgemeinerung des Waringschen Problems. Math. Z. **58**, 281—283 (1953). — [14] Rieger, G. J.: Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$. Gießener Dissertation. Auszug: Arch. Math. **4**, 275—283 (1953). — [15] Schnirelmann, L.: Über additive Eigenschaften der Zahlen. Math. Ann. **107**, 649—690 (1933). — [16] Segal, B. J.: Waringsches Problem für Potenzen mit gebrochenen und irrationalen Exponenten. Trav. Inst. Steklov **5**, 73—86 (1934).

Gießen, Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 15. Januar 1954).

Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists

By **Paul F. Byrd,** Aeronautical Research Scientist, National Advisory Committee for Aeronautics (USA.), formerly Assistant Professor of Mathematics, Fisk University, and **Morris D. Friedman,** Aeronautical Research Scientist, National Advisory Committee for Aeronautics (USA.) (Band 67 der Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, F. Rellich, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden.) With 22 Figures. XIII, 355 Seiten Gr.-8°. 1954. DM 36.—; Ganzleinen DM 39.60

Table of Contents: Preface. List of Symbols and Abbreviations. Introduction. Definitions and Fundamental Relations. Reduction of Algebraic Integrands to Jacobian Elliptic Functions. Reduction of Trigonometric Integrands to Jacobian Elliptic Functions. Reduction of Hyperbolic Integrands to Jacobian Elliptic Functions. Tables of Integrals of Jacobian Elliptic Functions. Elliptic Integrals of the Third Kind. Table of Miscellaneous Elliptic Integrals Involving Trigonometric or Hyperbolic Integrands. Elliptic Integrals Resulting from Laplace Transformations. Hyperelliptic Integrals. Integrals of the Elliptic Integrals. Derivatives. Miscellaneous Integrals and Formulas. Expansions in Series. Appendix. Bibliography. Index.

Aus den Besprechungen: Die funktionentheoretische Behandlung der elliptischen Funktionen und Integrale, wie sie in zahlreichen Büchern erfolgt, läßt die tieferen mathematischen Zusammenhänge klar zutage treten und ist für Probleme der konformen Abbildung von großer Bedeutung. Ein Physiker oder Ingenieur steht jedoch oft nur vor der Aufgabe, ein in der Praxis auftretendes elliptisches Integral rasch auszuwerten. Er wird mit Freude zu dem vorliegenden Handbuch elliptischer Integrale greifen, kann er sich doch damit das zeitraubende und für sein Problem nicht erforderliche Studium der Theorie elliptischer Funktionen ersparen.

In dieser Sammlung von über 3000 Integralen und Formeln findet sich zunächst eine Zusammenstellung der grundlegenden Definitionen und Relationen. Um auf kleinem Raum die Berechnung einer möglichst großen Mannigfaltigkeit elliptischer Integrale — insbesondere auch solche dritter Gattung — wiederzugeben, wird die Integration in zwei Teilen vorgenommen: Im ersten Abschnitt des Buches werden die Integrale über algebraische bzw. trigonometrische Funktionen auf solche über JACOBIsche Funktionen reduziert, während im zweiten Abschnitt Integrale dieser Form auf die JACOBIschen Funktionen selbst gebracht werden. Dezimalklassifikation und besondere Verweise ermöglichen ein rasches Auffinden der entsprechenden Integrale. Für den deutschen Leser ist es wichtig zu beachten, daß der Exponent —1 am Funktionszeichen die angelsächsische Bezeichnung für die Umkehrfunktion ist.

Am Ende des Buches finden sich neben hyperelliptischen Integralen und verschiedenen sehr nützlichen Hilfsformeln auch Wertetabellen für numerische Berechnungen.

„Zeitschrift für angewandte Physik"

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Einführung in die Physik

Von **Robert Wichard Pohl**, o. ö. Professor der Physik an der Universität Göttingen.

Erster Band:

Mechanik, Akustik und Wärmelehre

Zwölfte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 575 Abbildungen, darunter 15 entlehnten. VIII, 345 Seiten Gr.-8°. 1953. Ganzleinen DM 23.80

Inhaltsübersicht: **A. Mechanik:** Einführung. Längen- und Zeitmessung. Darstellung von Bewegungen, Kinematik. Grundlagen der Dynamik. Anwendungen der Grundgleichung. Hilfsbegriffe. Arbeit, Energie, Impuls. Drehbewegungen fester Körper. Beschleunigte Bezugssysteme. Einige Eigenschaften fester Körper. Über ruhende Flüssigkeiten und Gase. Bewegungen in Flüssigkeiten und Gasen. — **B. Akustik:** Schwingungslehre. Wellen und Strahlung. — **C. Wärmelehre:** Grundbegriffe. I. Hauptsatz und Zustandsgleichungen idealer Gase. Reale Gase und Dämpfe. Wärme als ungeordnete Bewegung. Transportvorgänge, insbesondere Diffusion und Wärmeleitung. Die Zustandsgröße Entropie. Umwandlung von Wärme in Arbeit. II. Hauptsatz. — Tafeln: Periodisches System der Elemente. Längeneinheiten, Krafteinheiten, Druckeinheiten, Energieeinheiten. Molare Größen. Wichtige Konstanten. — **Sachverzeichnis.**

Zweiter Band:

Einführung in die Elektrizitätslehre

Fünfzehnte Auflage. In Vorbereitung

Dritter Band:

Optik und Atomphysik

Neunte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 565 Abbildungen im Text und auf einer Tafel, darunter 23 entlehnten. VIII, 356 Seiten Gr.-8°. 1954.
Ganzleinen DM 29.70

Aus dem Vorwort: Dies 1940 zuerst erschienene Buch bildet den Schlußband einer Darstellung, die einen ersten Gesamtüberblick über die Physik und ihre inneren Zusammenhänge vermitteln soll. Ausgangspunkt ist stets die experimentelle Beobachtung. Der Band bringt nach wie vor mehr und teilweise schwierigere Einzelheiten als die beiden anderen. Er sollte Rücksicht nehmen auf die Bedürfnisse derjenigen, die experimentell auf optischem Gebiete arbeiten wollen.

Die hergebrachte Einteilung der Physik unterscheidet Mechanik, Akustik, Wärmelehre, Optik und Elektrik. Über die Willkürlichkeit dieser Einteilung ist man sich ebenso einig wie über ihre Zweckmäßigkeit. — In jedem der genannten Gebiete ist man in den Bereich der Moleküle und Atome vorgedrungen, und zwar in engem Anschluß an grundlegende, von chemischer Seite entwickelte Vorstellungen. Durch physikalische Forschungen ist die atomistische Auffassung der Materie heute Allgemeingut geworden. Unter den Beiträgen der einzelnen physikalischen Gebiete stehen die von der Optik gelieferten an erster Stelle. Durch sie hat man den Aufbau der Atome und Moleküle kennengelernt. Sie haben ein Verständnis des periodischen Systems der Elemente erschlossen. Auch haben sie die Kenntnis der Elementarteilchen, z. B. der Elektronen, erheblich gefördert. Diese Ergebnisse bilden das Kernstück dessen, was man heute Atomphysik nennt. Deswegen erscheint dies Wort jetzt auch im Titel des Buches.

Der Inhalt des Buches ist vermehrt, aber straffer gefaßt und nunmehr auf 20 statt bisher 15 Kapitel verteilt worden. Dadurch konnte eine Vermehrung des Umfanges vermieden werden.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.